1 微分 (differential)

現在來介紹一個在高中沒有學過的概念，其英文叫做 differential ，中文則叫微分。

如果我們將 $f(x)=x^2$ 作出它的導函數 $f'(x)=2x$，這個動作我們口語上常說是「微分」，將 x^2 微分後得到 $2x$。在此，「微分」是一個動詞，英文是 differentiate，其中文的另一個稱呼叫「求導」。中文不區分詞性的特性，使得我們需要靠上下文來判斷。其實要依靠上下文去判斷，問題還不大，會出問題的是初學者還沒清楚認識各種概念，加上高中時學過導數、導函數、求導等等，全都口語稱呼為微分。等到上大學，遇到現在要介紹的微分，就開始搞不懂了。其實這個概念不是多麼艱澀難懂，同學們在這裡發生問題，多是中文稱呼引起的。

我們先回想一下，動詞的微分 (differentiate)，也就是求導，是想要做出導函數（切線斜率函數）。其想法是先寫出割線斜率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$，接著讓 $\Delta x\to 0$，這樣出來的極限若是存在，便是導函數。Δx 代表著 x 的「差」，差的英文是 difference ，其第一個字母 d 對應到希臘文是 δ。而 δ 的大寫是 Δ，所以放在 x 的前面，Δx 代表 x 的差。萊布尼茲說，當我們做「讓 $\Delta x\to 0$」這個動作時，Δx 與 Δy 都是趨近到零的，此時它們是個**無窮小增量**。接著將無窮小增量 Δx 與 Δy 各自改寫成 $\mathrm{d}x$ 與 $\mathrm{d}y$，所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 讓 $\Delta x\to 0$ 的極限，就寫成 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 了！

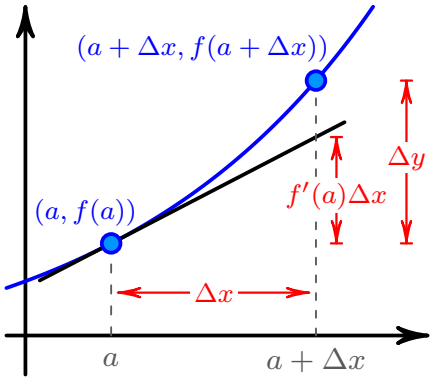
至於微分 differential，則是研究無窮小增量 $\mathrm{d}y$ 與無窮小增量 $\mathrm{d}x$ 之間的關係，他們通常不會直接相等，而是要乘上一個「放大率」。舉例來說，$y=x^2$，那麼 $\mathrm{d}y=2x\,\mathrm{d}x$。這條式子告訴我們，$y$ 方向的無窮小增量與 x 方向的無窮小增量，它們之間的關係是，要在 $\mathrm{d}x$ 前面乘上一個「放大率」$2x$，才會大約等於 $\mathrm{d}y$。而 $y=x^2$ 是怎麼得到 $\mathrm{d}y=2x\,\mathrm{d}x$ 的呢？其實那就是 $\mathrm{d}y=f'(x)\,\mathrm{d}x$。你可以不嚴謹地想像：我們先寫 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$，接著將 $\mathrm{d}x$ 乘到等號右邊。

若是不用這麼粗略的講法，我們來看著圖細究一下。在 $x=a$ 處的函數值是 $f(a)$，經過變化量 Δx 後，在 $x=a+\Delta x$ 處的函數值是 $f(a+\Delta x)$。這兩點函數值的真實差距為

$$\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$$

以 $(a,f(a))$ 為切點作切線，切線斜率為 $f'(a)$，經過變化量 Δx 後，在切線上的 y 的變化量是

$$f'(a)\Delta x$$



兩點函數值的差距 Δy 與切線上的 y 的變化量 $f'(a)\Delta x$，在 Δx 很小的時候，兩者是非常接近的（圖是為了方便辨認所以把 Δx 畫很大）。既然兩者非常接近，那我就可以說：

$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}$
$\Rightarrow \Delta y=m\Delta x$

$$\Delta y\doteqdot f'(a)\Delta x \tag{1.1}$$

因為切線是直線，所以無論 Δx 多麼小，其對應的 y 的變化量都是再乘上 $f'(a)$。即使是無窮小量 $\mathrm{d}x$，對應的 $\mathrm{d}y$ 也是 $f'(a)\,\mathrm{d}x$。

總結以上討論，所謂的微分 differential ，就是局部地**以切線代替曲線**。於是它的一個應用就是利用切線代替曲線的想法來估值。這又有另一個名稱，叫做**線性逼近** (linear approximation)。我們在高中學過內插法，那其實是以割線代替曲線！都是直線代替曲線的一種，區別只是用割線或切線。

舉一具體例子，譬如說在 $y=x^2$ 上先標出 $(2,4)$，我們想知道若 y 座標取 4.3 時，x 座標會是多少，換句話說就是求 $\sqrt{4.3}$。然而這個我們不太會算，於是就想到用切線代替曲線。以 $(2,4)$ 為切點作切線，我們看看在切線上，當 $y=4.3$ 時，會對到的 x 是多少。而因為 4.3 離 4 還不算太遠，所以 $y=4.3$ 在切線上對到的 x 值，與其在曲線上所對到的 x 值，便非常接近。在切點 $(2,4)$ 的附近，我們有

$$\Delta y \doteqdot f'(2)\Delta x \tag{1.2}$$

其中 $\Delta y = 4.3-4 = 0.3$，而 $f'(2) = 2x\Big|_{x=2} = 4$，代入得

$$0.3 \doteqdot 4\cdot\Delta x \ \Rightarrow \Delta x \doteqdot 0.075$$

所以我們的估計就是

$$\sqrt{4.3} \doteqdot 2+0.075 = 2.075$$

然而用計算機求的精確值是

$$\sqrt{4.3} = 2.073644135\cdots$$

果然，估計值與精確值相距並不遠。

例題 1.1 以線性逼近來估計 $\sqrt{99.8}$。

解

與前面類似地，我們可以設 $f(x)=x^2$，取切點 $(10,100)$。$f'(x)=2x$，$f'(10)=20$。於是

$$-0.2 \doteqdot 20\cdot\Delta x$$

移項得到

$$\Delta x \doteqdot -0.01$$

所以我們的估計值是 $10+(-0.01)=9.99$，而精確值是 $9.98999499\cdots$。

也可以換個方向寫，設 $f(x)=\sqrt{x}$，$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$f'(100)=\frac{1}{20}$。於是

$$\Delta y \doteqdot \frac{1}{20}\cdot(-0.2) = -0.01$$

所以估計值是 $10+(-0.01)=9.99$。

例題 1.2 以線性逼近來估計 $\tan(44°)$。

解

$44°$ 就是 $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{180}$。設 $f(x)=\tan(x)$，$f'(x)=\sec^2(x)$，$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$。於是

$$\Delta y \doteqdot 2\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right) = -\frac{\pi}{90}$$

所以估計值是 $1+\left(-\frac{\pi}{90}\right)$。

在萊布尼茲一開始探索微分的世界時，其實他就是用 differential 的寫法。譬如說，我們知道 $y = x^2$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$。而當年萊布尼茲是怎麼寫的呢？他是寫

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}(x^2) = (x + \mathrm{d}x)^2 - x^2 = 2x\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x^2$$

然後他說，$\mathrm{d}x^2$ 那是比無窮小還要遠遠地小，所以可以略去不看。於是就變成

$$\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$$

而後來才有除過去

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$$

微分的積法則，在某些書裡面稱呼為萊布尼茲法則。這樣稱呼正是因為當年是他導出來的：

$$\mathrm{d}(xy) = (x + \mathrm{d}x)(y + \mathrm{d}y) - xy = x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

接著忽略掉 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，便有

$$\mathrm{d}(xy) = x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$$

這便是最原始版的微分積法則。