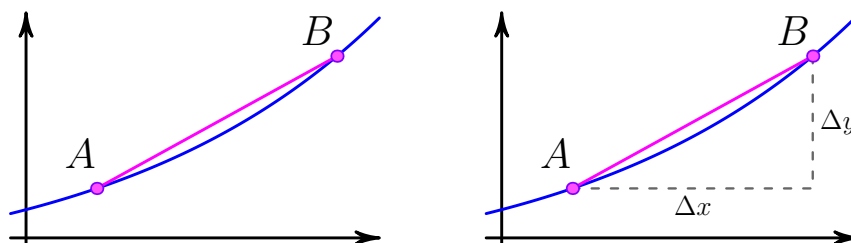
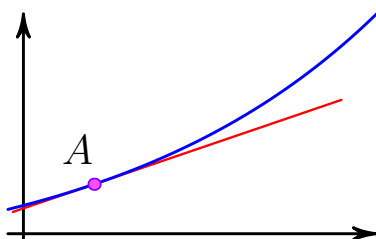


1 微分的定義

在一條曲線 $y = f(x)$ 上取 A 、 B 兩點，並且拉出線段 $\overline{AB}$ ，這條線便叫割線。如果想求割線的斜率，這是很容易的。只須拉出水平變化 Δx 和鉛直變化 Δy ，再相除後得到 $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$



如果是切線呢？有沒有辦法求出它的斜率？如下圖是以 A 點為切點的切線：



像這種問題，是有其具體意義的，並非只是數學家單純想要在幾何問題上求知。在牛頓發展微分學的時候，他主要是想解決運動學上的問題。如果你把以上的圖想成是 $s-t$ 圖，也就是說，圖中的函數代表著位置函數。橫軸改看成 t 軸，代表時間 t (time)；縱軸改看成 s 軸，代表物體的位置。那麼， A 點代表在某個時間，物體在某一個位置； B 點代表另一個時間，物體在另一個位置。當我們拉出割線，並求出斜率 $m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ 。用位置變化（位移）除以時間變化，求出來的東西就是平均速度。

舉個比喻，你從嘉義開車到台南^①，速度時快時慢。而如果你直接把開車的起點和終點拉出距離，再除以開車時間，求出來的就是平均速度。平均速度只不過是平均而言，並不代表每個當下都是這個速度。當你開車時一邊注意儀表板，就會看到每個當下的瞬時速度。

那如果沒有儀表板怎麼辦呢？如何從 $s-t$ 圖中看出瞬時速度呢？就是求切線斜率！ $s-t$ 圖中的割線斜率代表平均速度；切線斜率代表瞬時速度。

如果再講得更一般一點，這是變化率的問題！平均斜率 $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ，這是 y 方向的變化除以 x 方向的變化。這就是一種變化率， y 對 x 的變化率。平均而言， x 每增加 1 單位， y 會增加 m 單位。至於切線斜率，就是在那一瞬間的 y 對 x 變化率。而就運動學上來說，所謂速度其實就是位置對時間的變化率，位置變化除以時間變化。你也可以套在人口成長的模型上，假設人口函數 $P(t)$ ，那麼你在圖上拉割線斜率，就是人口對時間的變化率，也就是人口增長率。

介紹完求切線斜率的動機，我們來看看切線斜率究竟要如何求出。如果我們在 A 和 B 之間，多標幾個點，並且也都與 A 拉割線。可以看出，越靠近 A 的點，拉出來的割線越接近切線。

^① 我們假設一路上都是直線開的，以避免探討速度的方向性問題。

我們觀察到：如果讓動點 P 越來越靠近 A 點，它拉到 A 點的割線就會越來越接近以 A 為切點的切線。於是我們寫：

$$\lim_{P \rightarrow A} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

這樣寫的意思是，看動點 P 趨近到 A 時，割線斜率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 會趨近到何值。這樣子求出來的極限，便是切線斜率了！

微分學，就是起源於求切線斜率。這個在 A 點的切線斜率，正式地說，我們稱之為：函數 $y = f(x)$ 在 A 點的**導數** (derivative)。

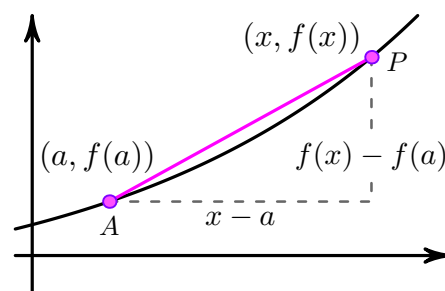
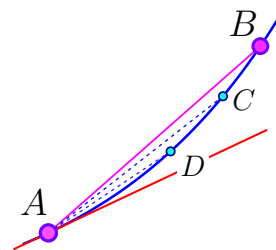
光是看符號，是沒辦法實際動手求出導數的，現在來給你導數的定義。首先設 A 點的 x 座標為 a ，至於 y 座標，就寫 $f(a)$ ②。至於動點 P ，就設為 $(x, f(x))$ 。這兩個點都設完座標以後，便可寫下

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

這是割線斜率。接著照我們剛剛所說的，使動點 P 趨近到 A 點

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

這樣求出來的極限值，就會是切線斜率了！



定義 1.1 導數的定義

函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 處的切線斜率，稱為 $f(x)$ 在 $x = a$ 處的**導數**。其定義為

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

例題 11

求 $y = x^2$ 在 $x = 3$ 處的導數。

解

套用導數的定義

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

寫下

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3}$$

$y = f(x) = x^2$ ，而 $f(3)$ 就是把 3 代進去得到 3^2 。接著因式分解，再上下約分便有

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$$

所以 $y = x^2$ 在 $x = 3$ 處的導數就是 6。換句話說， $y = x^2$ 在 $x = 3$ 處的切線斜率為 6。

② $y = f(x)$ ，將 $x = a$ 代入。

1. 微分的定義

例題 12 求 $y = \sqrt{x}$ 在 $x = 2$ 處的導數。

解

一樣套用導數的定義

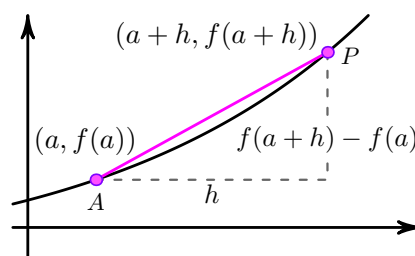
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} \quad \boxed{\text{反有理化}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{x} - \cancel{2}}{(\cancel{x} - \cancel{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \boxed{} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

所以 $y = \sqrt{x}$ 在 $x = 2$ 處的導數是 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 。

導數的定義，也有另一種形式。只要我們對動點 P 的表示方式稍作修改，由 x 改為 $a + h$ ，這個 h 其實就是 Δx 的意思。

此種情況之下，導數的定義

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$



定義 1.2 導數的定義

函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 處的切線斜率，稱為 $f(x)$ 在 $x = a$ 處的導數。其定義為

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

為什麼要多寫另外一種形式？這是因為針對不同的 $y = f(x)$ ，我們可以選擇會讓我們比較好做的形式。

例題 13 求 $y = x^2 + 2$ 在 $x = -1$ 、 $x = 2$ 、 $x = 3$ 處的導數。

解

在 $x = -1$ 處

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(-1 + h)^2 + 2] - [(-1)^2 + 2]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h - 2 = -2$$

在 $x = 2$ 處

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(2 + h)^2 + 2] - [2^2 + 2]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h + 4 = 4$$

在 $x=3$ 處

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(3+h)^2 + 2] - [3^2 + 2]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 6h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h + 6 = 6$$

在上一題中，我們將不同處的導數都一一寫出。可以發現，計算過程的重複性實在太高了，寫起來有點累。其實如果我們將導數定義中的 a ，暫且改寫成 x ，做出來的東西再去代 $-1, 2, 3$ ，便會省事得多。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

拿上一題來實際操作一次。 $y = x^2 + 2$ ，寫下

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 + 2] - [x^2 + 2]}{h} \\ &= \text{[redacted]} = 2x \end{aligned}$$

接著再分別代入 $x = -1, 2, 3$ ，便可以得到 $-2, 4, 6$ 。這樣做是不是省事多了呢？

我們先將函數 $y = x^2 + 2$ 套在 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ 做出另一個函數 $y = 2x$ ，接著再代點。我們稱 $y = 2x$ 這個函數為 $y = x^2 + 2$ 的導函數 (derived function)，其意義就好像「切線斜率函數」。想知道函數 $y = x^2 + 2$ 在 $x = a$ 處的切線斜率？那就將 $x = a$ 代入「切線斜率函數」！至於 $y = x^2 + 2$ ，我們可以說它是 $y = 2x$ 的原函數 (primitive function)，或是稱之為反導函數 (antiderivative)。將原函數 $y = x^2 + 2$ 求導，得到導函數 $y = 2x$ 。

同學常常搞不清楚導數和導函數有什麼分別。導數是一個數值，意義是切線斜率；導函數是一個函數，意義上來說可稱之「切線斜率函數」。如果我們想求函數 $y = x^2 + 2$ 在 $x = 2$ 處的切線斜率，那就是求函數 $y = x^2 + 2$ 在 $x = 2$ 處的導數。我們可以先求出它的導函數 $y = 2x$ ，再代入 $x = 2$ ，得到 4，便得到我們要的導數。不過，有時還是會將「導函數」簡稱為「導數」，或許這種簡稱方式是害初學者搞混的原因吧！

至於求出導函數這個動作，則叫求導 (differentiate)，我們也常稱之為「微分」。不過，「微分」這個詞，在中文口語中實在有點用途太廣：求導這個動作，我們可以說是微分，將 $y = x^2 + 2$ 微分後得到導函數 $y = 2x$ ；我們也會將導函數說是微分， $y = x^2 + 2$ 的微分是 $y = 2x$ ；還會把導數說是微分， $y = x^2 + 2$ 在 $x = 2$ 處的微分是 4；甚至，還有另一個概念，英文叫 differential，中文也叫微分！這個概念容後介紹。由於中文不分詞性，當你說「微分」的時候，我們須藉由上下文，來得知你意指為何。

接下來介紹符號。符號的使用在數學發展上扮演著非常重要的角色。好的符號可以讓我們更方便、更容易地去表達、理解、進行操作。舉個例子來說吧，右圖是元代數學家李治，在其著作《測圓海鏡》中進行幾何的解題。大約清末民初以後，數學就全面西化，不再使用古代數學的表示法了，是否覺得慶幸我們不必學習這種面貌的數學呢？

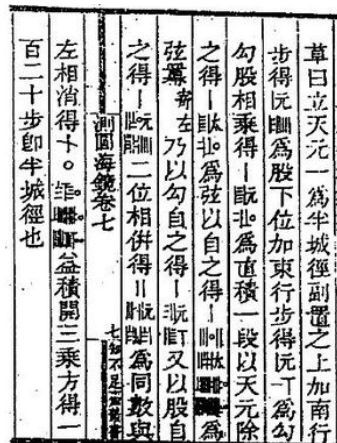
在微積分的发展歷史上，雖然因牛頓的名氣比較大，導致許多不了解的人偏向歸功於牛頓而非萊布尼茲。但是論到微積分上所用的符號，萊布尼茲所使用的符號卻遠優於牛頓的符號，相當好用。在十七世紀末，牛頓與萊布尼茲分別發表微積分的想法時，當時英國由於對於牛頓的盲目崇拜，使他們有好一段時間堅持使用牛頓的符號，這竟使得英國數學落後歐洲大陸一大截。等到十九世紀初英國人才開始醒過來，引入萊布尼茲符號。

1. 微分的定義

$y = f(x)$ ，它的導函數，牛頓記為 $\dot{y}$ ，在 y 的上面標一點。然而這樣的表示法，在我們現代的數學較少使用！後來十八世紀的法國數學家拉格朗日 (Lagrange)，他使用的符號是 $f'(x)$ ，在右上加一撇。這一撇也可以加在 y 的右上，記為 y' 。至於萊布尼茲，他是將無窮小的 Δx 記為 dx 、無窮小的 Δy 記為 dy 。這是取拉丁文中的「差」differentia 第一個字母 d 。而 d 對應到希臘文，是 δ ， δ 的大寫是 Δ 。 Δx 和 dx 都是表達 x 的差，其間區別是後者是無窮小的差。而切線斜率，就是先寫出割線斜率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ，再讓 Δx 趨近到 0，從而 Δy 也會同時趨近到 0。於是就寫成 $\frac{dy}{dx}$ ！我們可以這樣想：

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

你看這樣的符號，是否能幫助提醒你切線斜率是拿割線斜率取極限呢？往後我們還會繼續看到萊布尼茲符號的好處！



定義 1.3 導函數的定義

函數 $y = f(x)$ 的導函數 $f'(x)$ ，也可記為 y' 或 $\frac{dy}{dx}$ 。其定義為

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

例題 14

求 $y = x^3 + x^2$ ，求 y' 。

解

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^3 + (x+h)^2] - [x^3 + x^2]}{h} &= \text{[Redacted]} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 + 3xh + h^2 + 2x + h = 3x^2 + 2x \end{aligned}$$

$y = x^3 + x^2$ 的導函數 $y' = 3x^2 + 2x$ 。

例題 15

已知 $f'(0) = -1$ ，求極限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h) - f(-2h)}{h}$ 。

解

由導數定義， $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1$ 。即使 h 前面有係數，也只要變數代換就處理掉了： $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(k \cdot h) - f(0)}{k \cdot h} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(0)}{y} = -1$ 。所以將眼前問題拆解成

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h) - f(-2h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(3h) - f(0)) - (f(-2h) - f(0))}{h} \\ &= \text{[Redacted]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boxed{\text{對齊係數}} &= 3 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h) - f(0)}{3h} + 2 \cdot \frac{f(-2h) - f(0)}{-2h} \\ &= 3 \cdot f'(0) + 2 \cdot f'(0) = -5\end{aligned}$$