本文提供大部份微積分所需的基礎。名為複習，但因課綱變動的關係，有些內容在現今台灣高中教材的沒有或者弱化的。對於一般高中談過的部分進行快速複習，只是提醒你要會這些，無意重新講解，所以只是簡單列出。至於高中所未談，或是談得比較少的，才會寫得詳細。若是本文所未細談而你又不太清楚的部分，請翻閱高中課本（不是補習班講義）或 precalculus 教材。

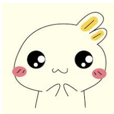
1 集合

將一群東西集起來，叫做集合。集合裡的東西，叫做元素。舉例來說

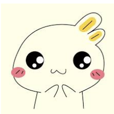
$$A=\{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\} \tag{1.1}$$

就是告訴我們，A 是一個集合，它有 10 個元素，分別是如上所列。對於「3 是 A 的元素」這件事，我們可以說「3 屬於 A」，符號上寫作 $3\in A$。在 A 裡面並沒有 2 這個元素，我們就說「2 不屬於 A」，符號上則是 $2\notin A$。

集合中的元素並不一定都是數字，例如

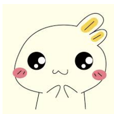
$B=\Bigg\{$  ,  ,  ,  $\Bigg\}$

就是一些可愛的東西。等等，我好像漏了什麼，改一下！

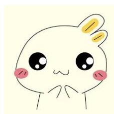
$B=\Bigg\{$  ,  ,  ,  ,  $\Bigg\}$

好了，補上我的照片，現在集合 B 的元素都是些可愛的東西。

集合是無序的，也是不計個數的，因為集合的概念只是單純看有哪些東西。假如我必須考慮順序或個數，那就是用其他概念。例如數對 $(1,3)$ 與 $(3,1)$ 就是不一樣，$(1,3,1)$ 更不一樣，它有三個數！而集合的無序性與不計個數，便使得 B 可以寫成

$B=\Bigg\{$  ,  ,  ,  ,  $\Bigg\}$

或是寫成

$B=\Bigg\{$  ,  ,  ,  ,  ,  ,  $\Bigg\}$

都可以！

在式子(1.1)中，將 A 的所有元素列出來，這叫**列舉法**。有時候用列舉法比較麻煩，可能太多了很難列，或是根本無法列出。這類情況可以考慮使用**描述法**。描述方法很可

能不只一種，只要能精確地描述出集合中所有元素並且讀者看懂即可。以剛剛的集合 A 來說，將其寫成描述法就是

$$A=\left\{n \,\middle|\, n\text{是奇數，}1\le n\le 20\right\} \tag{1.2}$$

或者寫成

$$A=\left\{2k-1 \,\middle|\, k\text{是整數，}1\le k\le 10\right\} \tag{1.3}$$

不同的描述方式，對象同樣都是集合 A。

至於集合 B，可不可以寫成這樣呢？

$$B=\left\{\text{一些圖片} \,\middle|\, \text{可愛的圖片}\right\}$$

這樣並不好。不好的原因不是我不可愛，而是第一，描述的部分應避免主觀成分；第二，描述的部分不光是對集合元素有正確敘述就夠了，所有符合你描述的東西都應該在集合內。例如如果我把 A 裡面的 19 拿掉，雖然剩餘的元素都符合我上面所寫的描述，但是會變成 19 符合描述但卻不在 A 裡，這樣就不行！

另舉一例。C 是所有小寫英文字母所形成的集合，描述法可寫成

$$C=\left\{\bigstar \,\middle|\, \bigstar\text{是小寫英文字母}\right\} \tag{1.4}$$

列舉法可寫成

$$C=\left\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z\right\} \tag{1.5}$$

也可寫成

$$C=\left\{a,b,c,d,\cdots,x,y,z\right\} \tag{1.6}$$

這樣寫是因為，預設了大家都看得懂我想表達的規律，於是中間作了省略，以避免真的全部列出的麻煩。

符號 $n(A)$ 用以表示集合 A 裡的元素個數，n 是 number 的第一個字母，以上面的例子來說，$n(A)=10, n(B)=5$。

符號 $\max(A)$ 及 $\min(A)$ 分別表示集合 A 裡的最大與最小元素，例如 $\max\left\{1,2,3\right\}=3, \min\left\{4,5,6\right\}=6$。

如果再寫一個集合

$$D=\left\{1,3,5,7,9\right\} \tag{1.7}$$

這樣寫，凡 D 中有的元素 A 都有，於是我們說 D 是 A 的子集合。符號上記作 $D\subset A$，讀作「D 包含於 A」。也可記作 $A\supset D$，讀作「A 包含 D」。要如何記方向呢？我建議利用大於小於的符號來記。D 包含於 A，集合 A 比較大，$n(A)>n(D)$，$A\supset D$。

如果寫

$$E=\left\{17,19,21\right\} \tag{1.8}$$

則在 A 中的 17,19 可在 E 中找到，其它則無；而 E 中的 21 也無法在 A 中找到。這種情況，A 與 E 彼此都不是對方的子集合。但是它們有一些共同的元素。我就這麼說，把 A 與 E 所有共同擁有的元素統統形成一個集合：

$$F=\left\{17,19\right\} \tag{1.9}$$

便稱 F 是 A 與 E 的**交集**。符號上記作 $F = A \cap E$，其中 $A \cap E$ 讀作「A 交集 D」。另外有一個與交集符號很像的，是 $\cup$，它叫聯集，其意義為

$$A \cup E = \{1, 3, \cdots, 19, 21\} \tag{1.10}$$

這個讀作「A 聯集 E」，它就是一個把兩個集合聯合起來的集合，將原來兩集合的所有元素通通囊括。聯集有點像是「集合的加」，除此外也有「集合的減」，就是差集：$E \setminus F = \{21\}$。也可以寫成 $E - F = \{21\}$，但用斜的可以明顯區分集合的減與一般減法。

再舉比較生活化的例子。班上男生形成一個集合 G；班上女生形成一個集合 H。兩者作聯集，可形成全班同學的集合 I：

$$I = G \cup H \tag{1.11}$$

如果說有一個集合 J，它是 G 與 H 的交集：

$$J = G \cap H \tag{1.12}$$

那麼 J 是一個怎樣的集合呢？所謂 J 是 G 與 H 的交集，意即集合 J 中的所有元素，都是 G 與 H 所共有的。換句話說，若有某個元素屬於 J，則它既屬於 G 又屬於 H。然而班上並沒有同學是既男又女，所以集合 J 中並沒有任何元素。此時我們稱其為空集合，意即其中空空如也。通常我們使用符號 $\varnothing$ 來表示空集合，所以你可以說 $G \cap H = \varnothing$。

以下再舉一些集合，是在數學中其它地方的例子。所有自然數（正整數）形成一個集合，我們記為 $\mathbb{N}$；所有整數形成一個集合，我們記為 $\mathbb{Z}$；所有有理數形成一個集合，我們記為 $\mathbb{Q}$；所有實數形成一個集合，我們記為 $\mathbb{R}$；所有複數形成一個集合，我們記為 $\mathbb{C}$。特地給符號看似麻煩，但這是為了日後使用上的方便！列表整理如下：

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$　　N 是 Natural number 第一個字母
2. $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$　　Z 是德文 Zahlen 第一個字母
3. $\mathbb{Q} = \left\{x \,\middle|\, x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}\right\}$　　Q 是 Quotient 第一個字母
4. $\mathbb{R} = \{x \mid x\text{為數線上可標出的數}\}$　　R 是 Real number 第一個字母
5. $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$　　C 是 Complex number 第一個字母

現在舉另外一種例子。區間也是一種集合，開區間 $(1,3)$ 即為 $\{x \mid x \in \mathbb{R}, 1 < x < 3\}$；閉區間 $[2,4]$ 即為 $\{x \mid x \in \mathbb{R}, 2 \le x \le 4\}$。開區間與閉區間，差別在於包含端點與否。如果將上述兩區間作交集，得到 $(1,3) \cap [2,4] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 2 \le x < 3\}$，這是半開半閉區間。既然現在已經認識，區間也是一種集合，那麼「$-2 < x < 3$ or $5 < x < 7$」便可用集合的寫法，寫成 $(-2,3) \cup (5,7)$；「$3 < x < 4$ or $x = 6$」可寫成 $(3,4) \cup \{6\}$。

例題 1.1　寫出 $x^2 < 4$ 的解集合。

解

$x^2 < 4$ 的解是 $-2 < x < 2$，但是什麼叫解集合呢？解集合就是所有解形成的集合，因此答案為 $(-2,2)$。若是改求 $x^2 \ge 4$ 的解集合，便為 $(-\infty, -2] \cap [2, \infty)$。

集合的元素可以是任意東西，就連集合也都可以當元素！例如

$$A=\big\{3,\{1,2,3\},4,5\big\}$$

集合 A 元素裡有數也有集合，因此我們可以說 $\{1,2,3\}\in A$，$\{1,2,3\}$ 是 A 裡頭的一個元素。$3\in A, 2\notin A$，3 是 A 的一個元素，2 並不是 A 的元素。

有些同學將「屬於」理解成「在裡面」，於是覺得 2 在 $\{1,2,3\}$ 的裡面，而 $\{1,2,3\}$ 又在 A 裡面，那麼 2 也就會在 A 裡面啊！不是這樣的，「屬於」不能說成「在裡面」，應該是看是否為其元素。

而為什麼要這樣玩呢？可能很多老師會說這就是定義，記起來就對了。沒錯這是定義，但多數定義是人為的，是我們有一些具體需要，選擇這樣子定，或是在許多不同的定法中，去作討論、抉擇，選一個比較有好處、比較能和其它定義與性質相容的。例如 $0!$ 為什麼定為 1？因為我可以滿足 $1!=1\times 0!$，又可以滿足 $C_0^5=\frac{5!}{0!5!}=1$，還能相容排列數：0 個相異物排列一共 $0!=1$ 種方法 [1]，實在是舒服！

話說回來，為何要將「屬於」定成那樣呢？比方說我有一個集合

$$A=\big\{[0,1],[1,2],[2,3],\ldots,[9,10]\big\}$$

這集合是一些由連續整數作為端點的閉區間所構成。區間也是集合，有無限多個實數作為元素，因此我們可以說 $1.3\in[1,2], 5\in[4,5], 5\in[5,6]$。但是你如果要跟我說 π 在 $[3,4]$ 裡面，$[3,4]$ 在 A 裡面，那麼 π 也在 A 裡面！對我就造成困擾，因為我初衷只是想讓 A 由一些區間構成啊！

2 函數與反函數

如果有 A,B 兩個集合，我們將 A 之中的每一個元素 a，都唯一地對應到 B 中的某一個元素，記為 $f(a)$。A 中兩個不同的元素對到 B 裡面同一個元素也沒關係，但 A 一個元素不能同時對到 B 中的兩個元素，且 A 中的所有元素都要對出去。那麼這種對應關係，就是函數，記為 $f(x)$。A 稱為函數 $f(x)$ 的定義域，B 則稱為函數 $f(x)$ 的對應域，而 $f(x)$ 所有的值所形成之集合稱為值域。

舉例來說，班上共有 40 位同學。本班這一次的數學考試，每個人都有一個成績，不可以缺考。當然，也不會一個人考出兩個成績來。但是有兩個人以上考一樣的成績倒是無所謂。這就是函數的規定，可以多對一，但不可一對多。定義域 A 是班上同學座號 $\{1,2,\cdots,40\}$，對應域 B 是考試成績的所有可能分數 $\{0,1,2,\cdots,100\}$。而值域就是所有考試分數的集合，譬如說 1 號考 61 分，2 號考 62 分，以此類推。那麼值域就是 $\{61,62,\cdots,100\}$，其中 $f(1)=61, f(2)=62,\cdots$。如果每個人剛好都考 80 分，那麼值域就是 $\{80\}$，$f(1)=f(2)=\cdots=f(40)=80$。

所以要搞清楚，值域和對應域是不一樣的東西。只是有些時候它們剛好是同一個集合，但事實上它們的定義是不同的。如果值域與對應域相同的時候，意思是說對應域 B 中的每一個元素都有被對到，這種情況叫蓋射，或叫映成。英文叫 surjective，或叫 onto。字首 sur-是「在 ⋯ 之上」的意思，字根 ject 則是「發射、注射」的意思。如果 A 之中任兩個不同元素，也都對到 B 中不同的元素。以例子中來說，就是不會有兩個人以上考相同分數。這種情況叫嵌射，英文叫 injective。字首 in-有多種意思，其中有「在 ⋯ 之內」的

[1] 沒東西，就不排。不排就是一種排法，無為亦為也！

意思。或者也可以叫一對一，英文是 one to one。如果既是蓋射也是嵌射，便稱為對射。英文叫 bijective。字首 bi-是「兩個、雙」的意思，

在上述例子中，$f(x)$ 就是將座號 a 丟入函數 f，得到該座號的考試成績 $f(a)$。那我們可不可以反過來問呢？問說考某某分數的人是誰。在前面值域為 $\{61, 62, \cdots, 100\}$ 的情況下，是可以的。我們可以說 $f^{-1}(63) = 3$，因為是跟 f 反向，所以我們記為 f^{-1}，稱為反函數。但在值域為 $\{80\}$ 的情況，答案是每個人都考 80。但函數的規定是定義域中的每個元素，都必須「唯一」地對應到 B 中的某一元素，不可以一對多。所以這種情況，也就是原來的函數如果是多對一，就不會有反函數。

這意思就是說，本來函數的規定是可以多對一，但是考慮反函數的時候卻會變成一對多。所以，一個函數若要有反函數，那麼它一定要一對一。

但是等一下等一下，在值域為 $\{61, 62, \cdots, 100\}$ 的情況下，如果真的寫一個反函數 f^{-1}。那麼原本函數的對應域，就變成了 f^{-1} 的定義域。還記不記得定義域的每個元素都要對出去？但現在凡是 60 以下的，都沒被對到座號，所以這情況其實還是不能有反函數！

整合以上討論，函數 f 要有反函數的條件便是：它必須是一對一且映成（one to one and onto）。也就是對射（bijective）。

簡單地來說，所謂反函數就是，我的 x 是你的 y，我的 y 是你的 x。例如 $y = 3x$ 與 $y = \frac{x}{3}$ 就互為反函數，你把 3 移項到另一邊就知道了。所以如果一個函數圖，我們把它的 x, y 互調的話，就是反函數的圖了。換句話說，$y = f(x)$ 與 $y = f^{-1}(x)$ 的函數圖，是對於 $y = x$ 這條線對稱的。

3 行列式

1. 二階行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ac - bd$$

2. 三階行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

3. 直為行 (coloumn)、橫為列 (row)。自古中文的使用便是直為行，例如：

   (1)《後漢書・應奉傳》:「奉讀書，五行並下。」

   (2)《北齊書・河南康舒王孝瑜傳》:「兼愛文學，讀書敏速，十行俱下。」

   (3) 杜甫《絕句》:「兩個黃鸝鳴翠柳，一行白鷺上青天。」
   （白鷺是直直地飛還是橫向地飛？）

   (4) 柳永《憶帝京・薄衾小枕涼天氣》:「繫我一生心，負你千行淚。」
   （眼淚是直直地流）

   $\boxed{\text{註}}$ 大陸地區已於 1950 年代逐漸將印刷品由豎排改為橫排，數學上的行與列也跟著變成橫行直列。在台陸生與在陸台生經常因兩岸用語不同而發生誤解。

4. 餘因子：將 a 遮住同一行同一列後，剩下的 $\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$ 即為 a 的餘因子。同理，將 e 遮住同一行同一列後，剩下的 $\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}$。

5. 奇排列與偶排列：將第一行第一列標為正，接著相鄰差負號

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

6. 降階：選定某一行或某一列之後，將該行/列的每個元素乘上其餘因子，並搭配奇偶排列。例：

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= -4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= +3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

7. 行列式可拆開：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4+a & 5-b & 6+c \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

8. 可提出：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4k & 5k & 6k \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} k & 2k & 3k \\ 4k & 5k & 6k \\ 7k & 8k & 9k \end{vmatrix} = k^3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

9. 任兩行/列交換後，行列式值差負號：

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

10. 任兩行/列相同，行列式值為 0：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

兩列交換後發現自己和自己差負號，所以為 0。

11. 任一行/列乘以 k 之後加到另一行/列，行列式值不變：

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4+k & 5+2k & 6+3k \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ k & 2k & 3k \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + 0 \end{aligned}$$

4 向量

向量的基本定義與基本操作

一個既有**方向**又有**大小**的量，即為向量。在物理學上，力、速度、加速度等等都須用向量來描述。而在幾何學上，我們用有向線段來描述向量：從 A 點拉一個向量到 B 點，這樣稱為向量 $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$。

你可能覺得奇怪：難道不應該是 $\overrightarrow{AB}$ 嗎？$\overrightarrow{AB}$ 不是指射線嗎？其實數學界在這裡符號並沒有正式作這種區隔，那只是台灣的高中一些使用習慣，但這並不是全世界數學通用的規範。高等數學的書亦經常使用粗體字來表示向量，例如 $\mathbf{u}$ 表示向量 $\overrightarrow{u}$。

向量常用坐標表示法。就是說，如果 $A(1,2), B(3,-5)$ 坐標給定，那麼 $\overrightarrow{AB} = (2,-7)$，如果你起始位於 $A(1,2)$ 處，當你的位移是向量 $\overrightarrow{AB} = (2,-7)$，便來到 $B(3,-5)$ 處。你移動的路徑長即為向量 $\overrightarrow{AB} = (2,-7)$ 的長度，也就是 $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2+(-7)^2} = \sqrt{53}$。

向量 $\overrightarrow{AB} = (2,-7)$ 又可表為 $2\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$，其中 $\mathbf{i} = (1,0), \mathbf{j} = (0,1)$ 稱為 *Gibbs* **基本向量**，分別表示 x 方向的單位向量[2]、y 方向的單位向量。

若是在三維空間亦同理。$C(3,1,2), B(6,0,-1)$ 坐標給定，那麼 $\overrightarrow{CD} = (3,-1,-3)$，又可表為 $3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$，其中 $\mathbf{i} = (1,0,0), \mathbf{j} = (0,1,0), \mathbf{k} = (0,0,1)$。

內積與外積

內積 (inner product) 來自物理的作功問題，計算功須將力 $\overrightarrow{F}$ 投影到位移 $\overrightarrow{S}$ 上。再計算投影後的長乘以被投影向量之長。故數學上的定義來說，對於兩個向量 $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$，**內積** (inner product) 為

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{u}\right| \left|\overrightarrow{v}\right| \cos(\theta)$$

其中 θ 為兩向量的夾角，向量間的夾角須將兩向量的起點擺一起後再看夾角，萬不可頭接尾，這樣看到的夾角會變成其補角。本來應該是 θ，變成 $180° - \theta$。

[2]單位向量的意思是長度為 1。

因內積符號使用「·」，內積又可稱為**點積**（dot product），$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ 在口語上可讀作 $\overrightarrow{u}$ dot $\overrightarrow{v}$；向量內積的結果是一個純量，故又可稱為**純量積**（scalar product）。

由內積定義作移項，可得到

$$\cos(\theta)=\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right|} \tag{4.1}$$

特別是，當向量 $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ 互相垂直時，即 $\theta=90^\circ$，則 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$。

Gibbs 基本向量 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$，他們長度皆為 1 且兩兩互相垂直，所以有

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1 & \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0 & \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0\\
\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=0 & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1 & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0\\
\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0 & \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}=0 & \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1
\end{array}$$

那麼操作向量內積時，比方說 $\overrightarrow{u}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k},\ \overrightarrow{j}=\mathbf{i}-4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$，就有

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}-4\mathbf{j}+5\mathbf{k})\\
&=2\times 1\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+3\times(-4)\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}+(-1)\times 5\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\\
&=2\times 1+3\times(-4)+(-1)\times 5
\end{aligned}$$

就是說，操作向量內積時可以直接將各個分量兩兩相乘再加起來。

物理學有右手開掌定則：電流 $\overrightarrow{I}$ 方向朝著拇指、磁場 $\overrightarrow{B}$ 方向朝著其餘四指，則磁力 $\overrightarrow{F}$ 朝著掌心所面對的方向。由此定義外積：

$$\overrightarrow{I}\times\overrightarrow{B}=\overrightarrow{F}$$

而若電流 $\overrightarrow{I}$ 方向與磁場 $\overrightarrow{B}$ 平行，則磁力為 0：

$$\overrightarrow{I}\times\overrightarrow{B}=0$$

因外積符號使用「×」，外積又可稱為**叉積**（cross product），$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$ 在口語上可讀作 $\overrightarrow{u}$ cross $\overrightarrow{v}$；向量外積的結果是一個向量，故又可稱為**向量積**（vector product）。

將 Gibbs 基本向量依據右手開掌定則及平行原理寫出：

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{i}\times\mathbf{i}=0 & \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k} & \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}\\
\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k} & \mathbf{j}\times\mathbf{j}=0 & \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}\\
\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j} & \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i} & \mathbf{k}\times\mathbf{k}=0
\end{array}$$

於是一般而言，兩向量 $\overrightarrow{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$ 與 $\overrightarrow{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}$ 外積為

$$\begin{aligned}
(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\times(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k})&=0+a_xb_y\mathbf{i}\times\mathbf{j}+a_xb_z\mathbf{i}\times\mathbf{k}\\
&\quad+a_yb_x\mathbf{j}\times\mathbf{i}+0+a_yb_z\mathbf{j}\times\mathbf{k}\\
&\quad+a_zb_x\mathbf{k}\times\mathbf{i}+a_zb_y\mathbf{k}\times\mathbf{j}+0\\
&=(a_yb_z-a_zb_y)\mathbf{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

第一列展開降階

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ a_x&a_y&a_z\\ b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

外積的性質：

1. 反對稱性

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\b_x&b_y&b_z\\a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}=-\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$$

2.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}&=\left(c_x\mathbf{i}+c_y\mathbf{j}+c_z\mathbf{k}\right)\cdot\left[\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\mathbf{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\mathbf{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\mathbf{k}\right]\\&=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)c_x+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)c_y+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)c_z=\begin{vmatrix}c_x&c_y&c_z\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}\end{aligned}$$

3. 外積的結果是公垂向量：$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{b}$。這是因為，設 $\overrightarrow{c}$ 平行 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 所在平面，可表為 $\overrightarrow{c}=\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}$，則有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}&=\alpha\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}+\beta\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\\&=\alpha\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}+\beta\begin{vmatrix}b_x&b_y&b_z\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=0\end{aligned}$$

5 平面中的直線方程式

平面中的直線 L，任意直線上兩點 A,B，拉出向量 $\overrightarrow{AB}$，即為 L 的方向向量，可記為 $\overrightarrow{L}$。一般來說，向量的方向與大小都很重要。但是方向向量的大小卻不重要，我們只是要表示方向用的而已，所以如果直線通過 $A(2,5),B(6,7)$，那麼你可以說方向向量是 $(4,2)$，也可以說是 $(2,1)$、$(40,20)$、$(-4,-2)$、$\cdots$，總之，任意 $k\overrightarrow{AB},k\neq0$，都可作為方向向量。

直線 L 的法向量 $\overrightarrow{n}$ 與方向向量 $\overrightarrow{L}$ 垂直，因此有

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{L}=0$$

如果 L 過兩點 $(1,2),(3,5)$，則方向向量 $\overrightarrow{L}=(3-1,5-2)=(2,3)$。對於任意線上一點 (x,y)，都有

$$(x-1,y-2)=\overrightarrow{L}=k(2,3),\quad k\neq0$$

如果直線 L 的法向量 $\overrightarrow{n}=(2,-1)$，點 $(1,5)$ 是 L 上一點，則

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{L}&=(2,-1)\cdot(x-1,y-5)\\&=2(x-1)-(y-5)=0\end{aligned}$$

這是直線的**點法式**。

如果 L 的斜率 -2，點 $(1,5)$ 是 L 上一點，則

$$y-5=-2(x-1)$$

這是直線的**點斜式**。

如果 L 的斜率 -2，y 截距為 7，則

$$y=-2x+7$$

這是直線的**斜截式**。

如果 L 的 x 截距為 $\frac{7}{2}$、y 截距為 7，則

$$\frac{x}{\frac{7}{2}}+\frac{y}{7}=1$$

這是直線的**截距式**。

6 空間中的平面方程式

如果平面 E 過點 $(1,5,-2)$，則對於任意平面上一點 (x,y,z)，都有

$$(x-1,y-5,z+2)\,//\,E$$

如果平面 E 的法向量 $\overrightarrow{n}=(2,-1,3)$，點 $(1,5,-2)$ 是 L 上一點，則

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n}\cdot(x-1,y-5,z+2)&=(2,-1,3)\cdot(x-1,y-5,z+5)\\&=2(x-1)-(y-5)+3(z+5)=0\end{aligned}$$

這是平面的**點法式**。

7 多項式

多項式的定義

形如

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

的，就是多項式。例如

$$3x^2-4x+1\qquad x^{2017}-x^{106}\qquad 3$$

都是多項式，而

$$|x|\qquad \sqrt{x^2+1}\qquad \frac{1}{x}$$

都不是。

多項式 $f(x)$ 的次方是指其非零項中的最高次方，以 $\deg$ 為記號，例如

$$\begin{aligned}&\deg\left(x^3+x+1\right)=3\\&\deg\left(-6x^5+x^2+2\right)=5\\&\deg 3=0\end{aligned}$$

性質 7.1

設 c 為非零實數，及 $P(x),Q(x)$ 為多項式滿足 $\deg P(x)=n, \deg Q(x)=m$，則

1. $\deg\left[cP(x)\right]=n$
2. $\deg\left[P(x)\cdot Q(x)\right]=n+m$
3. $\deg\left[P(x)\pm Q(x)\right]=\max\left\{n,m\right\}$ 其中 $n\neq m$

我們規定 $\deg 0=-\infty$，以便其相容 $\deg\left[0\cdot P(x)\right]=\deg\left[0\right]$ $(-\infty+n=-\infty)$

Vieta 定理

1. 設二次多項式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根為 α,β，則：

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}\\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

2. 設三次多項式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 之三根為 α,β,γ，則：

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}\\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}\end{cases}$$

3. 設四次多項式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 之四根為 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$，則：

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma+\delta=-\dfrac{b}{a}\\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=\dfrac{c}{a}\\ \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-\dfrac{d}{a}\\ \alpha\beta\gamma\delta=\dfrac{e}{a}\end{cases}$$

看似複雜，其實規律很簡單：無論是幾次方程，等號左邊的規律，依次是一個一個加起來、兩個兩個相乘加起來、三個三個相乘加起來、⋯；等號右邊分母一律是領導係數 a，分子依次填 b、c、d、⋯，最後再正負號交錯，依次負、正、負、正、⋯

餘因式定理

餘式定理：若多項式 $f(x)$ 除以一次式 $x-a$，所得商式 $Q(x)$、餘式 r，即

$$f(x)=(x-a)Q(x)+r$$

則 $f(a)=r$，等號兩邊代 $x=a$ 即得。更一般地，若多項式 $f(x)$ 除以一次式 $ax+b$，所得商式 $Q(x)$、餘式 r，即

$$f(x)=(ax+b)Q(x)+r$$

則 $f\big(-\dfrac{b}{a}\big)=r$，等號兩邊代 $x=-\frac{b}{a}$ 即得。

因式定理：其實就是餘式定理的特殊情況 $(r=0)$。若一次式 $ax+b$ 整除多項式 $f(x)$，即

$$f(x)=(ax+b)Q(x)$$

則 $f\big(-\dfrac{b}{a}\big)=0$，等號兩邊代 $x=-\frac{b}{a}$ 即得。

多項不等式

對於多項式 $f(x)$，先將其因式分解，比方說

$$f(x)=(x+1)(x-2)(x-5)$$

則當 $x>5$ 時，每個括號皆正；當 $2<x<5$，兩個括號正、一個括號負；當 $-1<x<2$，一個括號正、兩個括號負；當 $x<-1$，每個括號皆負。總結以上，便有：當 $x>5$ or $-1<x<2$，$f(x)>0$；當 $2<x<5$ or $x<-1$，$f(x)<0$。

若是有不可分的二次因式（判別式小於 0），比方說

$$(x+1)(x-2)(x-5)(x^2+x+1)>0$$

由於 x^2+x+1 恆正，可直接約去，得到

$$(x+1)(x-2)(x-5)>0$$

若是一次式的部分，有大於 1 的次方，比方說

$$(x+1)^5(x-2)(x-5)^2>0$$

那就先都約去偶數個，也就是說，約掉 $(x+1)^4$ 及 $(x-5)^2$，得到

$$(x+1)(x-2)>0$$

但是要小心，剛剛約去 $(x+1)^4$ 及 $(x-5)^2$ 並非恆正，當 $x=-1$ 或 $x=5$ 時他們可是負的！所以約去的時候要這樣寫：

$$(x+1)(x-2)>0,\quad x\neq -1,5$$

然後再繼續解。

8 有理函數

有理數是兩個整數相除的結果，其中除數不為 0。類似地，兩個多項式相除的結果，就是**有理函數**，亦可叫**有理分式** 其中除式不為 0。例如

$$\frac{x^2+x+1}{x-1}\qquad \frac{x^5-2x^4+3x+1}{2x^8+x^5-3}$$

都是有理函數。右邊的分子次方比分母小，稱之為**有理真分式**；左邊的分子次方比分母大，稱之為**有理假分式**。

假分數一定可以寫成帶分數，類似地，假分式一定可以寫成帶分式，即多項式加上真分式。例如

$$\frac{x^2+x+1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+2)+3}{x-1}=(x+2)+\frac{3}{x-1}$$

9 指對數

a^x 是指數函數，其中 $a>0, a\neq 1$，因為若 $a=1$ 的話，那麼這個函數恆等於 1，討論起來沒有意義。若 $a>1$，則 x 越大的話，a^x 就越大，換句話說 a^x 是遞增的。若 $0<a<1$，則 a^x 是遞減的。

指數的基本運算律：

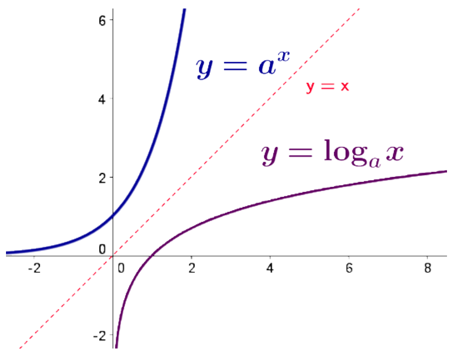
1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$
3. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
4. $a^0 = a^{x-x} = a^x \cdot a^{-x} = a^x \cdot \dfrac{1}{a^x} = 1$

$\log_a x$ 是對數函數，它是看 x 是 a 的幾次方，例如 $\log_2 8 = 3$。所以指數與對數，其實是一體兩面。用指數的寫法就是 $2^3 = 8$，用對數的寫法就是 $\log_2 8 = 3$。因此對數函數的底也必須符合 $a>0, a\neq 1$

對數的基本運算律：

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
3. $\log_{a^c} x^b = \dfrac{b}{c}\log_a x$
4. $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$
5. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$
6. $a^{\log_a b} = b$

指數函數與對數函數互為反函數，因為若 $y=a^x$，則 $\log_a y = x$，它與 $y=\log_a x$ 正是 x, y 互換。因此相同底數的指數函數與對數函數，畫出來正是關於 $y=x$ 對稱。



10 對稱、平移、伸縮

函數圖形的對稱是很棒的性質，經常使我們簡化運算。我們談討的對稱性可分為兩種：函數 f 自身的對稱性、函數 f 與 g 之間的對稱。後者是指一個函數的圖形繞對稱軸翻轉後，恰好得到另一個函數的圖形。例如前面介紹的反函數關係，$y=f(x)$ 與 $y=f^{-1}(x)$ 的函數圖形對稱於直線 $y=x$；前者是指一個函數的圖形繞對稱軸翻轉後圖形不變，例如 $y=x^2$，對稱軸是 $x=0$。

1. 若函數 f 的定義域為 $[-c,c]$，對 $x=0$ 對稱，且 $f(-x)=f(x)$ 對任意的 x 都成立，則 f 為**偶函數**，$y=f(x)$ 的函數圖形對於 y 軸左右對稱。這是因為任何定義域內的 $x=k$ 處，$x=-k$ 處的函數值都和它一樣，所以左右一樣高。

2. 若函數 f 的定義域為 $[-c,c]$，對 $x=0$ 對稱，且 $f(-x)=-f(x)$ 對任意的 x 都成立，則 f 為**奇函數**，$y=f(x)$ 的函數圖形對於原點對稱。這是因為任何定義域內的 $x=k$ 處，$x=-k$ 處的函數值都和它恰好差負號，所以右邊翻到左邊以後，還要往下翻。

3. 若 $f(-x)=g(x)$ 恆成立，則 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 的函數圖形對於 y 軸對稱。

4. 若 $f(-x)=-g(x)$ 恆成立，則 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 的函數圖形對於原點對稱。

5. 若 f 與 g 互為反函數，則 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 的函數圖形對於直線 $y=x$ 對稱。

如果是隱函數形式 $f(x,y)=C$，例如 $x^2+y^2=1$，那麼其圖形的對稱性為：

1. 若 $f(-x,y)=C$ 與 $f(x,y)=C$ 形式不變，例如 $(-x)^2+y^2=1$ 與 $x^2+y^2=1$ 根本就一樣，則其圖形對於 y 軸對稱。

2. 若 $f(x,-y)=C$ 與 $f(x,y)=C$ 形式不變，例如 $x^2+(-y)^2=1$ 與 $x^2+y^2=1$ 根本就一樣，則其圖形對於 x 軸對稱。

3. 若 $f(y,x)=C$ 與 $f(x,y)=C$ 形式不變，例如 $y^2+x^2=1$ 與 $x^2+y^2=1$ 根本就一樣，則其圖形對於直線 $y=x$ 對稱。

4. 若 $f(-x,-y)=C$ 與 $f(x,y)=C$ 形式不變，例如 $(-x)^2+(-y)^2=1$ 與 $x^2+y^2=1$ 根本就一樣，則其圖形對於原點對稱。

如果將 $y=f(x)$ 改寫為 $y=f(x-2)$，則其圖形往右平移 2 單位，因為例如原本 $(3,7)$ 在函數圖形上，即 $7=f(3)$，現在新函數為 $f(x-2)$，你 x 必須改代 5 才會得到 $f(5-2)=f(3)=7$。

如果將 $y=f(x)$ 改寫為 $y=f(3x)$，則其圖形左右伸縮 $\frac{1}{3}$ 倍，因為例如原本 $(3,7)$ 在函數圖形上，即 $7=f(3)$，現在新函數為 $f(3x)$，你 x 只須代 1 便得到 $f(3\cdot 1)=f(3)=7$。

11 角度與弧度

畫一個單位圓，就是半徑為 1 的意思，那麼它的圓周長就是 2π。於是我們就說，角度 360° 等於弧度 2π。於是

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \pi & 120^\circ &= \frac{2\pi}{3} \\ 90^\circ &= \frac{\pi}{2} & 60^\circ &= \frac{\pi}{3} \\ 45^\circ &= \frac{\pi}{4} & 30^\circ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

之後高等數學大多使用弧度，極少再出現角度制了，因此務必要熟悉弧度。

12 三角函數

歷史

三角函數源於古代的幾何測量，一般認為是起源於古希臘時代的天文學家 Hipparchus(Ἵππαρχος)，他首先給出了三角函數的數值表。但是當時研究的是球面三角學 [3]，比我們現在所學的平面三角複雜多了。

後來文藝復興時期，十五世紀德國數學家約翰・繆勒 (John Müller) 發表《論各種三角形》系統地講授三角學的知識，使三角學獨立於天文學，成為數學的一個分支。文藝復興後期，十六世紀的法國數學家 Vieta 於 1579 年發表《應用於三角形的數學定律》，系統地論述了平面三角與球面三角，書中第一部分給出了詳細的六個三角函數數值表。此一期間，數學正逐漸開始快速發展。

稍後徐光啟在湯若望等傳教士協助下，於 1634 年編出《崇禎曆書》，書中介紹了當時西方較為先進的天文學、數學等等，其中就包含了球面三角學，三角學由是傳入中國。《崇禎曆書》編出之後，明顯地優於舊曆法，於是崇禎皇帝在 1643 年決心實行新曆。但還沒頒布實行，隔年就清兵入關。後來湯若望將《崇禎曆書》獻給順治帝，順治帝將其更名為《西洋新法曆書》並於 1645 年頒行。

大約同一時期，伽利略發現，任何運動都可以分解成兩個互相垂直的分量，於是可以透過三角函數來表達這兩個分量，這使得三角學在運動學的研究中變得不可或缺。例如當時有一門炮彈學，便依據三角學而研究了炮彈的初速、仰角與射程間的關係，而這在現今高中物理斜拋的單元中亦有介紹。

十七、十八世紀時由於航海盛行，需要精密的航海技術及時鐘，因此而需要研究各種鐘擺及彈簧。加上當時樂器的製作日益精巧，也促使學者們去研究弦、風管等等發聲體的振動現象。諸如此類的物理學課題，我們都在現今高中物理看到三角函數在其中扮演不可或缺角色，這便是當時三角學地位高升的原因。

十八世紀，偉大的數學家歐拉 (Leonhard Euler) 將三角學中的各種三角量，視為一種函數，使其脱離幾何，成為可以直接被分析的對象，向現代的三角學邁進了一大步。我們現代對於三角函數的定義、符號，大多來自歐拉。

最後到了十九世紀，富立葉 (Jean-Baptiste-Joseph Fourier) 於 1822 年發表《熱的解析理論》，提出了週期函數幾乎都可以表為三角函數的級數，震驚了當時的科學界，這也使得三角函數的地位又攀升得更高。直到今日，富立葉的理論對於光學、聲學、信號處理(這又和我們使用的電腦網路、手機有關)、機率論、密碼學及量子力學等等都是至關重要，大學的工程類科系都會學到富立葉理論。有興趣了解，可上網搜尋「如果看了此文你还不懂傅里叶变换，那就过来掐死我吧」。

許多同學因受高中數學教材暗晦不明的荼毒，於是抱怨學三角函數是沒有用的。其實若歷史上從來沒有對三角函數的研究，也就沒有後續許多學問的發展，那麼現今的生活會是什麼景況，真是難以想像！

定義

由直角三角形定義：

[3] 畢竟是為了天文學服務嘛。希臘人似乎認為量天的學問比丈量土地更為引人入勝。

$$\sin(\theta) = \frac{a}{c}$$

互餘

$$\cos(\theta) = \frac{b}{c}$$

$$\tan(\theta) = \frac{a}{b} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{1}{\cot(\theta)}$$

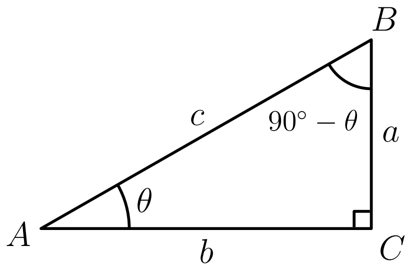
倒數　互餘

$$\cot(\theta) = \frac{b}{a} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

$$\sec(\theta) = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

互餘

$$\csc(\theta) = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin(\theta)}$$



互餘關係與倒數關係

1. sin 與 cos 是 互餘關係，所以會有：$\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
2. tan 與 cot 是 互餘關係，所以會有：$\tan(x) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
3. sec 與 csc 是 互餘關係，所以會有：$\sec(x) = \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
4. 倒數關係：$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$　$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$　$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

特別角

畫出 $30° - 60° - 90°$ 的直角三角形，其邊長比是 $1 : \sqrt{3} : 2$。畫完就可以看出 $\sin(x)$、$\cos(x)$ 及 $\tan(x)$ 分別代 $30°$ 與 $60°$ 各是多少。畫出 $45° - 45° - 90°$ 的直角三角形，其邊長比是 $1 : 1 : \sqrt{2}$。畫完就可以看出 $\sin(45°)$、$\cos(45°)$ 及 $\tan(45°)$ 的值分別是多少。這些都叫特別角，須牢記。記誦方式可用以下表格：

值 \ 角度 / 函數	0	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$				

平方恆等式

非常重要、常用的恆等式：

$$\begin{aligned} \sin^2(x)+\cos^2(x) &= 1 & \div\cos^2(x) \\ \div\sin^2(x) \qquad \tan^2(x)+1 &= \sec^2(x) \\ 1+\cot^2(x) &= \csc^2(x) \end{aligned}$$

第一個是來自畢氏定理：

$$\sin^2(x)+\cos^2(x) = \frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

將等號兩邊同除以 $\cos^2(x)$ 或 $\sin^2(x)$，便有第二、第三式。

廣義角

當質點在單位圓的圓周上運動，位置還位於第一象限時，其坐標 (x, y) 可表為 $(\cos(\theta), \sin(\theta))$：

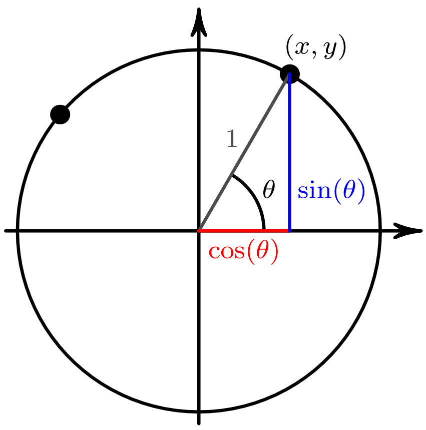
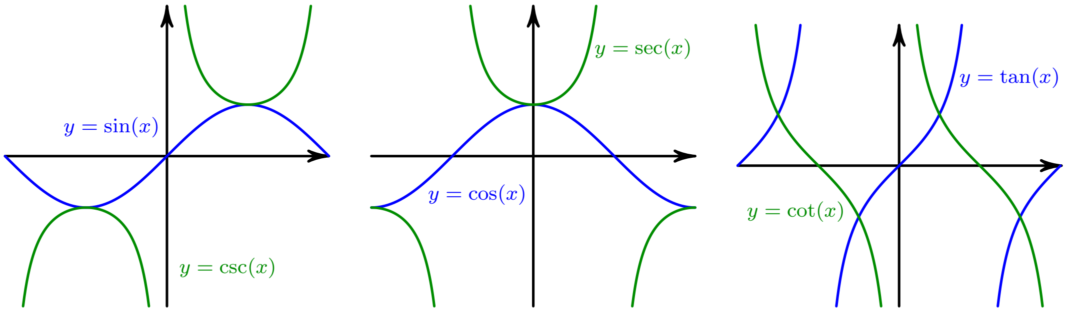


圖 1:

在三角函數的原始定義中，角度只能用第一象限。現在改以單位圓周上運動的質點來定義，其 x 坐標定為 $\cos(\theta)$、y 坐標定為 $\sin(\theta)$。這樣當質點移動到 $\theta = 120°$ 時，$\sin(120°)$ 就是其 x 坐標、$\cos(120°)$ 就是其 y 坐標。至於其它四個三角函數，則照樣依 $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ 等等關係來定。

y 在上方為正，下方為負。而現在 $\sin(\theta)$ 定為 y，因此 $\sin(\theta)$ 在第一、二象限為正，第三、四象限為負。x 在右方為正，左方為負。而現在 $\cos(\theta)$ 定為 x，因此 $\cos(\theta)$ 在第一、四象限為正，第二、三象限為負。$\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \dfrac{y}{x}$ 為點拉到原點之斜率，因此 $\tan(\theta)$ 在第一、三象限為正，第二、四象限為負。（也可以利用 $\sin(\theta)$、$\cos(\theta)$ 的同號異號判斷）

廣義的三角函數已經定義好，於是六個三角函數的函數圖形為：



和角、倍角、半角公式

三角函數的和角公式，先背這兩個

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

接著將 $-\beta$ 代到上面的 β 裡面，並注意 $\sin(-x)=-\sin(x), \cos(-x)=\cos(x)$，便可得到

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

可以合在一起寫

$$\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta)\\ \cos(\alpha\pm\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

在和角公式裡，令 $\alpha=\beta=\theta$，便會有倍角公式

$$\begin{aligned}\sin(2\theta) &= 2\sin(\theta)\cos(\theta)\\ \cos(2\theta) &= \cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)\\ &= 2\cos^2(\theta)-1\\ &= 1-2\sin^2(\theta)\end{aligned}$$

現在注意看上面畫線的地方，此時設 $\theta=\frac{x}{2}$，便會有

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-1\\ \cos(x) &= 1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

作些移項以後就會有半角公式

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1+\cos(x)}{2}\\ \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1-\cos(x)}{2}\end{aligned}$$

所以，只要我們先將和角公式背起來，那麼倍角、半角也都可以知道。萬一連和角公式都忘記了怎麼辦呢？

第一招：複數的極式 $a+bi=r\big(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\big)$。其中 r 是該複數到原點的距離，θ 是將它和原點拉一條線以後，這條線跟 x 軸正向夾幾度。如果有兩個複數相乘的話，所得到的複數，其長度是那兩個複數的長度相乘；其角度是那兩個複數的角度相加。也就是說

$$\begin{aligned}&r_1(\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1))\cdot r_2(\cos(\theta_2)+i\sin(\theta_2))\\=&r_1r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\big)\end{aligned}$$

如果我們是動手去乘開，則會得到

$$\begin{aligned}&r_1(\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1))\cdot r_2(\cos(\theta_2)+i\sin(\theta_2))\\=&r_1r_2\big(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)-\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\big)+i\big(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2)+\cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\big)\end{aligned}$$

接著利用 實部 等於 實部 、 虛部 等於 虛部 ，就會有和角公式了。

第二招：旋轉矩陣 $\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}$
旋轉 α,β 角各一次，勢必等同於一口氣轉 $(\alpha+\beta)$。因此

$$\begin{bmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos(\beta) & -\sin(\beta)\\ \sin(\beta) & \cos(\beta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix}$$

必然要成立。因此我們只須動手去乘開，就會有

$$\begin{bmatrix}\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)-\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) & *\\ \sin(\theta_1)\cos(\theta_2)+\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) & *\end{bmatrix}$$

疊合

當遇到形如

$$3\sin(x)+4\cos(x)$$

該如何化簡呢？這個形式聯想到和角公式：$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)$，我們可不可以說有某個 θ 使得 $\cos(\theta)=3,\sin(\theta)=4$ 呢？當然不行，兩者的範圍應該介於 -1 到 1 之間。但只要略施手腳：

$$5\big(\frac{3}{5}\sin(x)+\frac{4}{5}\cos(x)\big)$$

將 $\sqrt{3^2+4^2}=5$ 提出來，這樣就可以說 $\cos(\theta)=\frac{3}{5},\sin(\theta)=\frac{4}{5}$。一方面滿足範圍，另一方面兩者平方和為 1。所以變成

$$5\big(\cos(\theta)\sin(x)+\sin(\theta)\cos(x)\big)=5\sin(x+\theta)$$

類似地，亦有

$$3\sin(x)+4\cos(x)=5\big(\frac{3}{5}\sin(x)+\frac{4}{5}\cos(x)\big)=5\big(\sin(\theta)\sin(x)+\cos(\theta)\cos(x)\big)=5\cos(x-\theta)$$

其中 $\sin(\theta)=\frac{3}{5},\cos(\theta)=\frac{4}{5}$

13 反三角函數

三角函數的反函數，就是反三角函數。本來反函數必須要一對一，但三角函數都是無限多對一，怎麼辦呢？我們就先將三角函數的定義域縮小，縮小到變成一對一，但仍要保持映成。以 $\sin(x)$ 為例，若我們將定義域縮小為 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$。那就變成一對一了，而且值域仍然保持是 $[-1,1]$。如果我們是縮小為 $[0,\frac{\pi}{2}]$，雖然也是一對一，但值域剩下 $[0,1]$，不符合我們要求。於是，反三角函數 $\sin^{-1}(x)$ 的定義域是 $[0,1]$，值域則是 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$。

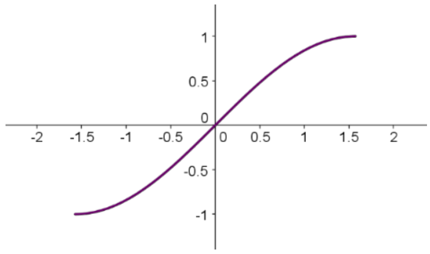


圖 2: 只取一個週期的 $\sin(x)$

在此，我列出所有反三角函數的定義域與值域：

	定義域	值域
$\sin^{-1}(x)$	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
$\cos^{-1}(x)$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
$\tan^{-1}(x)$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$
$\cot^{-1}(x)$	$\mathbb{R}$	$(0,\pi)$
$\sec^{-1}(x)$	$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$	$[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]$
$\csc^{-1}(x)$	$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$	$[-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2}]$

它們很重要，須全部記起來。不過別被我嚇到，所謂的全部記起來不是要你辛苦地一個一個背。剛才所舉例的 $\sin(x)$，我們只要畫出它的函數圖，然後取中間那一個週期，便是 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 了。而 $\csc(x)$ 的話，因為它是 $\sin(x)$ 的倒數而已，所以取一樣的範圍。但是它在 0 的地方沒有定義，所以要挖掉。$[-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2}]$ 長得那麼醜，其實只不過是 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\setminus\{0\}$ 的意思，就這麼簡單。

所以，我們就可以面對像是 $\sin^{-1}(\frac{1}{2})$，它的意思就是問說，哪個角取了 sin 以後會變成 $\frac{1}{2}$。限制是，這個角必須在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 內，所以我們不能答 $\frac{5\pi}{6}$，而應該答 $\frac{\pi}{6}$。

符號上，$\sin^{-1}(x)$ 也可以寫成 $\arcsin(x)$，同理還有 $\arccos(x)$ 、$\arctan(x)$ 等等。

如果畫出一個直角三角形，斜邊標上 1，某一股邊標上 x。那麼兩個銳角中便有一個是 $\sin^{-1}(x)$ 而另一個是 $\cos^{-1}(x)$。直角三角形的兩個銳角是互餘的，因此

$$\sin^{-1}(x)+\cos^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}$$

這是恆成立的。所以這個式子其實只是表達了 sin 與 cos 的互餘。同理也有

$$\tan^{-1}(x)+\cot^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}$$
$$\sec^{-1}(x)+\csc^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}$$

不管 x 代多少都恆成立。

通常的情況下，

$$f^{-1}\left(f(x)\right)=x$$
$$f\left(f^{-1}(y)\right)=y$$

都會成立。這意思很容易理解，A 中的某個元素被送到 B 中的某個元素，然後再送回來。或是反過來，B 中的某個元素先反過來送到 A 中的某個元素，然後再送回去。

但是反三角函數的情況就要小心一下了，因為我們是先將三角函數的定義域縮小至一個週期內，再定出反三角函數。

舉例來說，$\sin\left(\sin^{-1}(\frac{1}{2})\right)=\frac{1}{2}$，這沒有問題。$\frac{1}{2}$ 被反三角函數送到 $\frac{\pi}{6}$，接著又被送回 $\frac{1}{2}$。然而，$\sin^{-1}\left(\sin(\frac{5\pi}{6})\right)$ 就必須小心了。$\sin(\frac{5\pi}{6})=\frac{1}{2}$，但 $\sin^{-1}(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6}$。這是因為 $\frac{5\pi}{6}$ 並不在 $\sin^{-1}(x)$ 的值域內，所以必須改為對到 $\frac{\pi}{6}$。事實上

$$\sin\left(\sin^{-1}(x)\right)=x$$

恆成立，因為 $\sin^{-1}(x)$ 的定義域（所丟入的 x 的所有可能值）與 $\sin(x)$ 的值域（等號右邊 x 的所有可能值）相吻合。然而

$$\sin^{-1}\left(\sin(x)\right)=x$$

則只在 $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 的情況成立。至於其它的三角函數也都是同樣道理，就不一一列出了。

接著來看更複雜一點的，$\tan\left(\cos^{-1}(x)\right)$ 該怎麼辦？有一個辦法是畫一個直角三角形，其中一個銳角是 $\cos^{-1}(x)$。所以斜邊標上 1，鄰邊標上 x，對邊用畢氏定理可求出。三邊長都有了，$\tan(\cos^{-1}(x))$ 的大小就可以知道了。接著再依象限考慮正負號。考慮的方式就看 $\cos^{-1}(x)$ 的值域，是包括一、四象限。第一象限取 tan 為正，第四象限取 tan 為負。

例題 13.1 求 $\cos\left(\tan^{-1}(x)\right)$。

解

畫三角形的方法相信是很簡單的，應該無須多作練習，所以我在此用其它方法來做。

先設 $\tan^{-1}(x)=\alpha$，於是當然 $\tan(\alpha)=x$。我們現在的問題是，在已知 $\tan(\alpha)=x$ 的情況下，要求 $\cos(\alpha)$：

$$\begin{aligned}\cos(\alpha)&=\frac{1}{\sec(\alpha)}\\&=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}\\&=\pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

接著考慮，$\tan^{-1}(x)$ 的值域是一、四象限，然而 $\cos(x)$ 內放一、四象限的角都會是正的。所以答案是 $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，無須正負號。

例題 13.2 求 $\tan\left(\sec^{-1}(x)\right)$。

解

設 $\sec^{-1}(x)=\alpha$，$\sec(\alpha)=x$。於是

$$\tan(\alpha)=\pm\sqrt{\sec^2(\alpha)-1}=\pm\sqrt{x^2-1}$$

> 接著檢查，由於 $\sec^{-1}(x)$ 的值域包括一、二象限。而 $\tan(x)$ 在第一象限為正、第四象限為負，所以的確會有正負號。
>
> 也可以寫得更精確：
>
> $$\tan\left(\sec^{-1}(x)\right) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1} & \text{如果 } x \geq 1 \\ -\sqrt{x^2-1} & \text{如果 } x \leq -1 \end{cases}$$

14 排列組合與二項式定理

從五個人裡選兩人出來，選法有

$$C_2^5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5\times 4}{1\times 2}$$

對於

$$(x+y)^8 = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{8\text{個}}$$

乘開的時候就是每個括號分別取 x 或者 y 出來乘，如果我們想知道 x^3y^5 的係數是多少，便等同於剛剛我們在乘開，每個括號分別取 x 或者 y 出來乘時，有幾次是出想 x^3y^5。而這又等同於，8 個括號中，其中 5 個括號取 y，取法有幾種？答案是 C_5^8，因此 x^3y^5 的係數是 C_5^8。更一般來說，對於

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n\text{個}}$$

$x^{n-k}y^k$ 的係數是 C_k^n，這便是二項式定理。

定義 14.1

對於非負整數 n，

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1}y + \cdots + C_{n-1}^n xy^{n-1} + C_n^n y^n$$

note

在許多書中，用 $\binom{n}{k}$ 來表示 C_k^n。

15 圓與球

在平面上，以 (h,k) 為圓心，半徑為 r 的圓，其標準式為

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

這是因為圓上任何一點 (x,y)，其到圓心 (h,k) 的距離恒為 r，故

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

然後兩邊平方便得到上述標準式。

在空間中，以 (h,k,l) 為球心，半徑為 r 的球面，其標準式為

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2$$

原理與平面中的圓方程式相仿。