多項式解餘式技巧

卓永鴻 提供

定理 1 **餘式定理**

多項式函數 $f(x)$ 除以一次因式 $x-a$ 的餘式為 $f(a)$

這是非常好理解的。除式為一次式，所以餘式必然是常數。我們寫

$$f(x) = \boxed{(x-a)Q(x)} + r$$

在等號兩邊代 $x = a$，讓 第一項 變成 0，便可得 $f(a) = 0 + r$。

一次因式的一次係數不一定都是 1，所以更一般來說，餘式定理可以寫成下面這樣：

定理 2 **餘式定理**

多項式函數 $f(x)$ 除以一次因式 $ax-b$ 的餘式為 $f\left(\frac{b}{a}\right)$

例題 1

設多項式 $f(x)$ 除以 $x-2$ 之商式為 $Q_1(x)$，餘式為 1；除以 x 之商式為 $Q_2(x)$，餘式為 -2。則 $Q_1(x)+Q_2(x)$ 除以 $x-1$ 之餘式為______。

解

先將題目條件寫下：

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)Q_1(x)+1 \\ &= x \cdot Q_2(x) - 2 \end{aligned}$$

由餘式定理可知，$Q_1(x)+Q_2(x)$ 除以 $x-1$ 之餘式就是 $Q_1(1)+Q_2(1)$。所以將 $x=1$ 代入上面的條件，得到

$$\begin{aligned} f(1) &= -Q_1(1)+1 \\ &= Q_2(1)-2 \end{aligned}$$

由 $-Q_1(1)+1 = Q_2(1)-2$ 移項便可得 $Q_1(1)+Q_2(1) = 3$。

■

如果除式的次數比 1 大，還會有這麼好用的餘式定理嗎？舉例來說

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + r(x)$$

其中 $r(x) = ax + b$ 為一次以下多項式。若分別代 $x = 1$、$x = 2$，會得到

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 + r(1) \\ f(2) &= 0 + r(2) \end{aligned}$$

現在餘式 $r(x)$ 是一次以下多項式 $ax + b$，所以我們無法直接說餘式就是 $f(1)$ 或 $f(2)$。餘式定理之所以那麼好用，是因為除式為一次式，餘式必然為常數。但是我們仍然可以說，使得除式 $(x-1)(x-2)$ 為 0 的兩個值：$x = 1$、$x = 2$，它們代在 $f(x)$ 或代在 $r(x)$ 都會相等。

定理 3 **高階餘式定理**

多項式函數 $f(x)$ 除以 $d(x)$ 的餘式為 $r(x)$，且 $d(a) = 0$，則 $f(a) = r(a)$。

$$f(x) = d(x)Q(x) + r(x)$$

在等號兩邊代 $x = a$，便有 $f(a) = 0 + r(a)$。

例題 2

若多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 3、除以 $x-2$ 的餘式為 5，則 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式為何？

解

列下題目條件

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q_1(x) + 3 \\ &= (x-2)Q_2(x) + 5 \end{aligned}$$

而所求為

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q_3(x) + (ax + b)$$

$(x-1)(x-2)$ 是二次式，故餘式 $r(x)$ 為一次以下多項式 $ax + b$。由高階餘式定理

$$\begin{cases} f(1) = r(1) \\ f(2) = r(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = a + b \\ 5 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (2, 1)$$

所以餘式就是 $2x + 1$。

■

這樣的解法雖然可行，但如果餘式是二次以下 ax^2+bx+c，這樣要慢慢解三個未知係數就有點麻煩了，因此我們介紹另一種手法。

數學上一個很重要的精神是**類推** (analogy)，多項式的諸如除式、被除式、商式及餘式是由整數的除數、被除數、商數及餘數所類推來的，所以讓我們先思考整數的情況。

對於 $97=3\times 30+7$，我們可不可以說「97 除以 3 的餘數是 7」呢？不行，因為 7 不比 3 小，不能當作餘數。可以說目前還剩下 7，但不可以說餘數就是 7。這個 7 不比 3 小，表示我們還沒除乾淨，所以要繼續除：$7=3\times 2+1$，這個 1 就是 97 除以 3 的餘數。

類推至多項式的情況，列下題目條件

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q_1(x)+3 \\ &= (x-2)Q_2(x)+5 \end{aligned}$$

拿第一個條件來用，將所求寫成

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x-2)Q_3(x)+(ax+b) \\ &= (x-1)\Big[(x-2)Q_3(x)\Big]+(ax+b) \end{aligned}$$

寫成這樣，我們可不可以說 $f(x)$ 除以 $(x-1)$，商式是 $(x-2)Q_3(x)$、餘式是 $ax+b$ 呢？不可以，因為 $ax+b$ 很可能是一次式，不能當作 $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式。$ax+b$ 的次方太大了，表示我們還沒除乾淨，所以要繼續除：$ax+b=a(x-1)+(b+a)$，這個 $(b+a)$ 就是真正的餘式了。代回上面：

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)\Big[(x-2)Q_3(x)\Big]+(ax+b) \\ &= (x-1)\Big[(x-2)Q_3(x)\Big]+a(x-1)+(b+a) \\ &= (x-1)\Big[(x-2)Q_3(x)+a\Big]+(b+a) \end{aligned}$$

對照第一個條件，我們就知道 $(x-2)Q_3(x)+a$ 便是商式 $Q_1(x)$ (這不重要)，而 $b+a$ 就是餘式 3 (這超級重要)。現在我們可以來寫第二種解法。

解 2

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q_1(x)+3 \\ &= (x-2)Q_2(x)+5 \end{aligned}$$

所求寫成

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x-2)Q_3(x)+(ax+b) \\ &= (x-1)(x-2)Q_3(x)+a(x-1)+3 \end{aligned}$$

如上面所討論，這是套用第一個條件及「沒除乾淨繼續除」的精神而來。現在套用第二個條件，可得

$$f(2)=0+a(2-1)+3$$

也就是

$$5 = a + 3 \quad \Rightarrow a = 2$$

所以餘式 $a(x-1)+3$ 就是 $2(x-1)+3 = 2x+1$。

■

許多解餘式的技巧，都可以用「沒除乾淨繼續除」來理解，以下再多用幾個例題作為演示。

例題 3

若多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 3、除以 $x-2$ 的餘式為 5、除以 $x-3$ 的餘式為 11，則 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 的餘式為何？

解 1

列下題目條件

$$\begin{aligned} f(x) =& (x-1)Q_1(x)+3 \\ =& (x-2)Q_2(x)+5 \\ =& (x-3)Q_3(x)+11 \end{aligned}$$

而所求為

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)Q_4(x) + (ax^2+bx+c)$$

由高階餘式定理

$$\begin{cases} f(1) = r(1) \\ f(2) = r(2) \\ f(3) = r(3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = a + b + c \\ 5 = 4a + 2b + c \\ 11 = 9a + 3b + c \end{cases} \Rightarrow (a,b,c) = (2,-4,5)$$

所以餘式就是 $2x^2-4x+5$。

■

解 2

列下題目條件

$$\begin{aligned} f(x) =& (x-1)Q_1(x)+3 \\ =& (x-2)Q_2(x)+5 \\ =& (x-3)Q_3(x)+11 \end{aligned}$$

利用第一、第二個條件，將所求寫成

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)Q_4(x) + \boxed{a(x-1)(x-2) + b(x-1) + 3}$$

代 $x=2$，可得

$$f(2) = 0 + 0 + b(2-1) + 3$$

也就是

$$5 = b + 3 \quad \Rightarrow b = 2$$

最後利用第三個條件，可得

$$f(3) = 0 + a(3-1)(3-2) + 2(3-1) + 3$$

也就是

$$11 = 2a + 4 + 3 \quad \Rightarrow a = 2$$

所以餘式就是

$$\boxed{2(x-1)(x-2) + 2(x-1) + 3} = 2x^2 - 4x + 5$$

■

現在來解釋，為什麼利用第一、第二個條件時，餘式是那樣寫呢？餘式是二次式，所以將它繼續除以 $x-1$ 時，商式是一次式、餘式是題目所給的 3。上面這樣的寫法，可看成

$$a\,(x-1)\,(x-2) + b\,(x-1) + 3 = (x-1)\left[a(x-2) + b\right] + 3$$

這樣商式 $a(x-2)+b$ 確實是一次式，並且那個 $(x-2)$ 讓我們欲利用第二個條件時，代 $x=2$ 會較好算！

例題 4

若多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 4、除以 x^2+x+1 的餘式為 $3x-5$，則 $f(x)$ 除以 x^3-1 的餘式為何？

解

列下題目條件

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q_1(x) + 4 \\ &= (x^2+x+1)Q_2(x) + (3x-5) \end{aligned}$$

利用第二個條件，將所求寫成

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)\,(x^2+x+1)\,Q_3(x) + \boxed{(ax^2+bx+c)} \qquad \text{沒除乾淨繼續除} \\ &= (x-1)\,(x^2+x+1)\,Q_3(x) + \boxed{a\,(x^2+x+1) + (3x-5)} \end{aligned}$$

$f(x)$ 除以 x^2+x+1 的商式是 $(x-1)Q_3(x)+a$，餘式是 $3x+5$。現在套用第一個條件，代 $x=1$，得到

$$f(1)=0+a(1+1+1)+(3-5)$$

也就是

$$4=3a-2 \quad \Rightarrow a=2$$

所以餘式就是

$$2(x^2+x+1)+(3x-5)=2x^2+5x-3$$

■

例題 5

$f(x)$ 為一多項式，若 $(x+1)f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為 $5x+3$，則 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為何？

87 學測

解

先寫出所求

$$f(x)=(x^2+x+1)Q_1(x)+(ax+b)$$

除式 x^2+x+1 是二次式，故餘式為一次以下多項式 $ax+b$。兩邊同乘以 $x+1$，得到

$$(x+1)f(x)=(x^2+x+1)\Big[(x+1)Q_1(x)\Big]+(x+1)(ax+b) \tag{1}$$

我們可不可以說，$(x+1)f(x)$ 除以 x^2+x+1 的商式是 $(x+1)Q_1(x)$、餘式是 $(x+1)(ax+b)$ 呢？不可以，因為 $(x+1)(ax+b)$ 是二次式，次方太大了，不能當餘式。次方太大，表示還沒除乾淨，沒除乾淨繼續除，寫成

$$(x+1)f(x)=(x^2+x+1)\ \Big[(x+1)Q_1(x)\Big]+a\ (x^2+x+1)\ +\ (5x+3) \tag{2}$$

對照 (1) 與 (2) ，可得

$$(x+1)(ax+b)=a(x^2+x+1)+(5x+3)$$

乘開得到

$$ax^2+(a+b)x+b=ax^2+(a+5)x+(a+3)$$

便可知 $(a,b)=2,5$，所以餘式 $ax+b=2x+5$。

■

例題 6

$f(x)$ 為不低於 3 次之多項式，以 $x+1$ 除之餘 -17，以 $x-1$ 除之餘 -4，以 $x+2$ 除之餘 108，以 $(x+1)(x-1)(x+2)$ 除之餘 ax^2+bx+c。則 $a+b+c=$ ______ 。

解

題目並不是問餘式，是問餘式 $r(x)$ 的各項係數和 $a+b+c$，也就是 $r(1)$。而我們知道 $r(1)=f(1)$，這個在題目條件早就給了！故所求就是 $a+b+c=r(1)=f(1)=-4$。

下筆前看清楚題目問什麼，不要太機械化地解題。

■

例題 7

$f(x)=x^{200}$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式為何？

解

雖然題目沒講明，但我們可以自行寫出 $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式為 $f(1)=1^{200}=1$。利用此條件，將所求寫成

$$\begin{aligned} x^{200} &= (x-1)^2Q(x)+a(x-1)+1 \\ x^{200}-1 &= (x-1)^2Q(x)+a(x-1) \\ \cancel{(x-1)}(x^{199}+\cdots+x+1) &= (x-1)^{\cancel{2}}Q(x)+a\cancel{(x-1)} \\ (x^{199}+\cdots+x+1) &= (x-1)Q(x)+a \end{aligned}$$

兩邊代 $x=1$，得到

$$200=0+a$$

故餘式為 $200(x-1)+1=200x-199$。

■

解 2

設 $t=x-1$，則題目變成 $x^{200}=(t+1)^{200}$ 除以 t^2 的餘式。使用二項式定理

$$(t+1)^{200}=C^{200}_{200}\,t^{200}+\cdots+C^{200}_{2}\,t^2+C^{200}_{1}\,t+C^{200}_{0}$$

則顯然 $(t+1)^{200}$ 除以 t^2 的餘式即為 $C^{200}_{1}\,t+C^{200}_{0}=200(x-1)+1=200x-199$。

■

例題 8

$f(x) = x^{37} - 2x^{26} + 4x^7 - 3$，則：

(1) $f(x)$ 除以 $x^2 + 1$ 的餘式為______。

(2) $f(x)$ 除以 $x^2 + x + 1$ 的餘式為______。

解 1

(1)

$$f(x) = (x^2 + 1)Q_1(x) + ax + b$$

利用高階餘式定理，代 $x = i$，得到

$$f(i) = 0 + ai + b$$

而

$$f(i) = i^{37} - 2i^{26} + 4i^7 - 3 = i + 2 - 4i - 3 = -3i - 1$$

可知 $(a, b) = (-3, -1)$，故餘式為 $ax + b = -3x - 1$。

(2)

$$f(x) = (x^2 + x + 1)Q_2(x) + ax + b$$

利用高階餘式定理，代 $x = \omega$ $(\omega^3 = 1,\ 1 + \omega + \omega^2 = 0)$，得到

$$f(\omega) = 0 + a\omega + b$$

而

$$f(\omega) = \omega^{37} - 2\omega^{26} + 4\omega^7 - 3 = \omega - 2\omega^2 + 4\omega - 3 = 7\omega - 1$$

可知 $(a, b) = (7, -1)$，故餘式為 $ax + b = 7x - 1$。

■

如果你因為對複數不太熟，看不太懂我上面在寫什麼，完全沒有關係！因為我真正的目的，是想要介紹另一種寫法。

所謂的利用高階餘式定理，是想找出 a 使得 $d(a) = 0$，從而 $f(a) = d(a)Q(a) + r(a) = 0 + r(a)$。我們完全不用知道商式 $Q(x)$，它會被乘以 0。然而想使用 $d(a) = 0$，一定要把 a 值給找出來 (如上面解法) 嗎？

解 2

(1)

$$f(x)=(x^2+1)Q_1(x)+ax+b$$

利用高階餘式定理，讓 $x^2+1=0$，即 $x^2=-1$，代回 $f(x)$ 得

$$\begin{aligned}f(x)&=x^{37}-2x^{26}+4x^7-3\\&=\left(x^2\right)^{18}\cdot x-2\left(x^2\right)^{13}+4\left(x^2\right)^3\cdot x-3\\&=\left(-1\right)^{18}\cdot x-2\left(-1\right)^{13}+4\left(-1\right)^3\cdot x-3\\&=x+2-4x-3\\&=-3x-1\end{aligned}$$

這樣餘式就出來了。

■

(2)

$$f(x)=(x^2+x+1)Q_2(x)+ax+b$$

利用高階餘式定理，讓 $x^2+x+1=0$，即 $x^2=-x-1$。代回 ··· 不對，這樣代回 $f(x)$ 會死人。我們在 $x^2+x+1=0$ 兩邊同乘以 $x-1$，得到 $x^3-1=0$，即 $x^3=1$。代回 $f(x)$，得

$$\begin{aligned}f(x)&=x^{37}-2x^{26}+4x^7-3\\&=\left(x^3\right)^{12}\cdot x-2\left(x^3\right)^8\cdot x^2+4\left(x^3\right)^2\cdot x-3\\&=x-2x^2+4x-3\\&=-2x^2+5x-3\end{aligned}$$

這樣餘式就出 ··· 不對，餘式不應該是二次式。此時再利用前面寫的 $x^2=-x-1$，便可得餘式為 $-2(-x-1)+5x-3=7x-1$。

■

$10^{2016}\div 3$ 的餘數是多少？我們可以先拿底數 10 來除以 3，得底數 1 以後變成 $1^{2016}=1$。至於 $11^{2016}\div 3$ 的餘數，一樣先拿底數來除，變成 2^{2016}，然後再寫成 4^{1008}，再一次拿底數來除以 3，得 $1^{1008}=1$。

多項式的情況亦可類推，請看以下此題。

例題 9

多項式 $(x+1)^6$ 除以 x^2+1 的餘式為 ______ 。

92 學測補考

解

令除式 $x^2+1=0$，即 $x^2=-1$。

$$\begin{aligned}(x+1)^6 &= (x^2+2x+1)^3 \longrightarrow (2x)^3 && x^2+1=0\\ &= 8x^3 = 8x\cdot x^2 \longrightarrow 8x\cdot(-1) && x^2=-1\\ &= -8x\end{aligned}$$

■

例題 10

設三次實係數多項式 $f(x)$ 除以 $x-1, x-2, x-3$ 所得餘式分別為 $1,2,4$，且令二次多項式 $g(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}+2\cdot\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}+4\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$。請選出正確的選項。

(A) $g(4)=7$

(B) $f(5)=g(5)$

(C) $f(x)$ 除以 $x-4$ 的餘式為 7

(D) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式為 x

(E) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 的餘式為 $g(x)$

解

n 次多項式須由 $n+1$ 個點來唯一決定。

由題意知 $f(1)=1, f(2)=2, f(3)=4$。題目說 $f(x)$ 是三次多項式，現在只知它通過 $(1,1),(2,2),(3,4)$ 三個點，無法確定三次多項式 $f(x)$。換句話說，通過 $(1,1),(2,2),(3,4)$ 三個點的三次多項式有無限多個。題目所給的 $g(x)$ 是拉格朗日插值法的形式，可看出 $g(1)=1, g(2)=2, g(3)=4$，這是已被確定的二次多項式。

(A) ○ 直接代入，$g(4)=1-6+12=7$ 。

(B) × $g(5)$ 是確定的值，但 $f(x)$ 未被唯一確定，故 $f(5)$ 無法確定。

(C) × $f(x)$ 除以 $x-4$ 的餘式為 $f(4)$，但 $f(x)$ 未被唯一確定，故 $f(4)$ 無法確定。

(D) ○ 設 $f(x)=(x-1)(x-2)Q_1(x)+(ax+b), f(1)=a+b, f(2)=2a+b \Rightarrow (a,b)=(1,0)$

(E) ○ $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)Q(x)+r(x)$，$r(x)$ 為二次以下多項式。

由高階餘式定理知 $f(1)=r(1), f(2)=r(2), f(3)=r(3)$ ，

故 $r(x)$ 為通過 $(1,1),(2,2),(3,4)$ 三個點的二次多項式，而這就是 $g(x)$ 。

■