1　微積分的起源

大多數生醫理工科系、商管類科系的同學都必須修習微積分，微積分這一科已經幾乎是共同必修，且又是大多數同學的夢魘。究竟，微積分有什麼用，以致於這麼多人必須面對它，以及它是如何產生的呢？

微積分學的發展與應用，影響了非常多的領域。舉凡金融精算、經濟學、商業管理、醫藥、機械、水利、土木、建築、航空及航海，特別是物理學，它的發展必須大量使用到微積分。

在這門學問中，我們更多地認識了實數，促進我們對於函數更多認識，我們學會如何求變化率、怎麼求極大極小值、怎麼求曲線所圍的面積、怎麼求曲面的表面積及其所圍的體積、怎麼作近似計算等等。正如微積分的英文 calculus[1]，它可以說是高等數學中的基本運算法則。微積分可以說是一種革命性的數學思想，靠它可以解決以往未解決的著名難題，也可以更輕易地處理已解決但不好處理的問題。除了微積分本身可以應用在許多領域外，許多實用的學問例如統計學、微分方程、實分析、複分析、泛函分析、機率論等等，皆奠基於微積分而發展，而它們也都被應用在許多領域。可以毫不誇張地這麼說，沒有微積分，就沒有現代科學文明。

那麼，微積分又是如何被發展起來的呢？眾所周知，微積分是在十七世紀末，由牛頓和萊布尼茲所發明的。其實這樣講，並不是說他們獨自從頭建立起整個微積分學說。事實上，微積分的概念，早在古希臘時代便已萌芽。到了十七世紀時，數學逐漸開始高度發展，有許多數學家致力於微分學與積分學的工作。後來由牛頓與萊布尼茲，集其大成、進一步突破，而形成微積分學說。

微積分的思想源流，最早可推溯到公元前五世紀的希臘數學家 Eudoxus（**Εὔδοξος**），他用了窮盡法，將圓視為圓內接多邊形的極限。後來公元前三世紀的阿基米德（*Archimedes* *Ἀρχιμήδης*），也使用窮盡法來處理許多體積與面積的問題，將窮盡法發揚光大。

到了大約十六、十七世紀的時候，人們開始想對於物理問題，做一些定量的研究。在此之前，流行的是亞里斯多德的物理學，對於物理問題是以定性的探討為主。而且當中有很多描述，與我們現在物理學上的認知是有出入的。譬如說，物體的重量越大，其趨向天然位置的傾向也越大，所以其下落的速度也越大；天體是由特殊質料構成的，具有特殊性質。天體

[1] 這一詞來自拉丁文，其原意為計算用的小石子，羅馬人用 calculus 來進行計算與賭博。

是神靈們的處所，所以天體的運動是沿著最完美的曲線，也就是圓周，且是以最完美的速度，也就是等速運動來作運動。以上這些我們今日聽來荒謬，都是當時被奉為圭臬的概念。大約十六世紀中期開始，興起了一股反對亞里斯多德學說的思潮，他們對於阿基米德的方法大為崇拜。譬如說十六世紀末物理學家伽利略，他就希望能有別於這種定性的、原因方面的探討，作些定量上[2]的、現象方面的描述。於是在比薩斜塔做了落體實驗，發現重球與輕球看起來是同時落地的。這個時期，就是文藝復興時期的科學革命。在此期間，科學研究開始快速發展。

在當時的物理與數學中，啟發微積分快速發展的，有四大問題：

1. 研究物理中的非等速運動
2. 作出曲線的切線與法線
3. 找出函數的極大值、極小值
4. 求曲線所圍出的面積，及曲線的弧長

我們先來看第四個問題。多邊形的面積我們都會計算，可是一但一個幾何形狀不是由直線段圍成的，而是由曲線圍成的，那該怎麼辦呢？曲線所圍面積之中，最常見最基本的例子就是圓的面積。如前所述，早在西元前六世紀的 Eudoxus 和前三世紀的阿基米德，就用窮盡法來求圓周率及圓面積。後來西元三世紀，三國時代的劉徽也做了類似的事。他用割圓術逼近圓的面積，其內涵是透過內接正多邊形的方式來逼近圓。

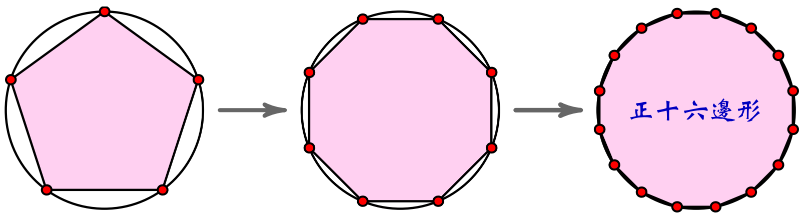

Figure 1: 圓內接多邊形

我們在圖 1 可見，圓內接正 16 邊形看起來就已經跟圓相當接近了。而實際上劉徽用到正 96 邊形，到了南北朝的祖沖之，更是內接了正 24576 邊形[3]。我們用數學式子把這件事寫下來：

[2]達文西：「人們的探討不能稱為是科學的，除非通過數學上的說明和論證。」

[3]祖沖之所估計的圓周率已經精確到小數點後七位，相當於千萬分之一的誤差，這已是相當難得的。

性質 1.1

設 A 為我們要計算的圓面積，A_3 為圓內接正三角形面積，A_4 為圓內接正方形面積。以此類推，A_n 為圓內接正 n 邊形面積。於是當 n 越來越大、越來越大，無止盡地大下去。換句話說，當 n 趨近於無窮大的時候，圓內接正 n 邊形趨近到圓，A_n 便會趨近於圓面積 A。這件事若用數學式子表示，便是：

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \tag{1}$$

式子 1 是極限的數學寫法，將英文字 limit 去掉末兩個字母，然後掛在 A_n 的左邊，用以表示 A_n 的極限。下面標示 $n \to \infty$ [4]，用意是告訴人家，足碼（index number）是誰。在這裡我們的足碼是 n，接著表達這個極限是將足碼 n 趨近無窮大，A_n 會隨之趨近到何值。

積分學就是源自求曲線下所圍面積的問題，其所用的就是這種類似割圓術的辦法。我們這裡只是先作很粗略的介紹，先讓你看看積分學是在探討什麼問題，暫時不正式地去討論積分。

接著我們來看第二個問題：求曲線的切線斜率。如果在曲線中取兩個點，將兩點之間拉出一條割線，那麼這條割線的斜率我們都會做，就是寫下 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$。但如果是給定一個點當作切點，並作過此切點的切線，應該如何求此切線的斜率呢？我們先看一下右圖，若以圖中的 A 點為切點，過 A 有一條深藍色的切線。若將 A 點依序與 B、C、D、E 分別都拉出割線，我們可發現這些割線越來越靠近深藍色切線。

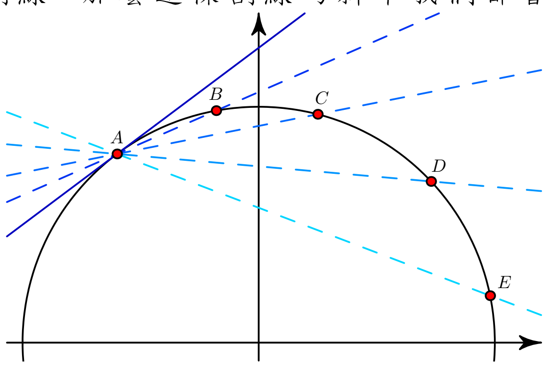

Figure 2: 割線逼近切線

這就是微分學的想法了，微分就是在做曲線上的切線斜率。其想法是，利用我們會算的割線斜率，去趨近到切線斜率。如果切點的座標是

[4] 羅馬人常用一千這數字來代表「多」。而在羅馬數字中，1000 的其中一個寫法是 CIↃ。後來十七世紀，微積分先鋒之一的英國數學家 John Wallis，他在其著作《無窮的算術》中，將 CIↃ 略作變形，寫成 ∞ 以表示無窮大。

(x_1, y_1)，然後先找附近一個點 (x_2, y_2)，拉出割線斜率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$。接著我們將切點 (x_1, y_1) 固定不動，讓 (x_2, y_2) 趨近到切點 (x_1, y_1)。於是割線斜率就會越來越趨近到切線斜率了。我把這個想法整理如下：

性質 1.2

若 P 點是 $y = f(x)$ 上的一點，L 是以 P 當切點所作的切線，而 P_2 是 $y = f(x)$ 上的一動點。如果

$$\lim_{P_2 \to p} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2}$$

這個極限是存在的，其值等於 m，那麼 m 就是切線 L 的斜率。

這裡也只是先很粗略介紹什麼是微分，你看懂看不懂都無所謂，我們現在暫不實際去求切線斜率。

總結以上，微分學來自求切線問題，而積分學則來自求面積問題。兩者看似截然不同，但這當中卻隱含著重要的關係：

它們事實上是反問題！

當十七世紀數學家們不斷地在微分學上與積分學上有一些突破時，慢慢開始有些人看出二者間的關係，譬如說牛頓的老師 Issac Barrow。最後是由牛頓與萊布尼茲，他們都明確指出微分與積分的互逆性，將微積分集大成。所以，大家公認是由他們倆發明微積分。

在以上的介紹當中，微分與積分都牽涉到極限。極限的概念是微積分的基礎，所以市面上各家微積分教科書，幾乎都是從極限開始作介紹 [5]。讓讀者先明白何謂極限，並且能自己動手計算極限，接著才繼續介紹微分以及積分。

[5] 有一本書叫作 Calculus Without Limits : Almost，然而它還是用到極限了。