1 雙曲函數

1.1 雙曲函數的定義

一個圓心在原點的單位圓，其直角座標方程式為

$$x^2+y^2=1 \tag{1.1}$$

而我們可以寫出它的參數式

$$\begin{cases} x=\cos(t) \\ y=\sin(t) \end{cases}$$

這樣寫，一方面是將 x,y 代回原方程式是符合的。另一方面，我們可以賦予參數 t 幾何意義：夾角。

至於一個左右向的雙曲線，若中心在原點，兩軸皆為 2。則標準式

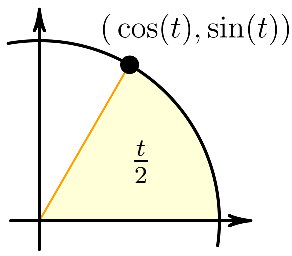
$$x^2-y^2=1 \tag{1.2}$$

如果我們設參數式

$$\begin{cases} x=\sec(t) \\ y=\tan(t) \end{cases}$$

這樣代入也會合方程式，但就不像剛剛，t 具有這樣簡單的幾何意義[1]。

於是現在有一個問題：我們能不能重新設一個參數式，能夠使其參數 t 是能具有簡單的幾何意義呢？甚至得寸進尺，能不能讓雙曲線參數式的 t，與圓參數式的 t，幾何意義是很相近的？



我們先回頭處理一下圓的狀況。剛剛說 t 是夾角，現在稍微修改一下我們的說詞。由於扇形面積

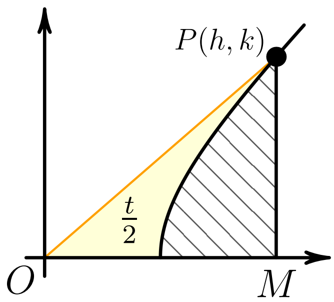
$$A=\frac{1}{2}r^2t \tag{1.3}$$

所以，如果是單位圓，$r=1$，那麼就會有

$$t=2A \tag{1.4}$$

所以我們現在就說，t 是單位圓上的動點，往圓心拉一條線段後，再與 x 軸所圍扇形面積的兩倍。

我們現在希望，寫出雙曲線新的參數式，使其參數 t 是：雙曲線上動點往雙曲線中心拉一條線段後，再與 x 軸及雙曲線所圍，這樣一個區域的面積的兩倍。我們現在就先畫出 $x^2-y^2=1$，然後取一個動點 $P(h,k)$。自 P 點向 x 軸引垂線，垂足為 M，如右圖。三角形 OPM 的面積，扣掉斜線區域的面積後，正是我們要的面積 $\frac{t}{2}$。而至於斜線區域面積，它便是雙曲線下的面積，因此可列積分式來求。所以



$$\frac{t}{2}=\frac{1}{2}hk-\int_1^h\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

[1] 有人畫了複雜的圖，硬是將這裡的 t 的幾何意義展示出來，但這樣顯然不會令我們滿意。

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2}h\sqrt{h^2-1}-\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]_1^h\\
&=\frac{1}{2}\ln\left(h+\sqrt{h^2-1}\right)
\end{aligned}
$$

所以移項解出

$$t=\ln\left(h+\sqrt{h^2-1}\right)$$

我們想要的參數 t 已經出來了！接下來再做一點處理

$$
\begin{aligned}
e^t&=h+\sqrt{h^2-1} && \boxed{\text{放入 } e \text{ 的次方中}}\\
e^t-h&=\sqrt{h^2-1}\\
e^{2t}-2he^t+h^2&=h^2-1\\
e^{2t}+1&=2he^t\\
h&=\frac{e^t+e^{-t}}{2} && \boxed{\text{將 } 2e^t \text{ 除到左邊}}
\end{aligned}
$$

(h,k) 是雙曲線上的動點，滿足 $h^2-k^2=1$，因此

$$
\begin{aligned}
k^2&=h^2-1\\
&=\frac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{4}-1\\
&=\frac{e^{2t}-2+e^{-2t}}{4}\\
\Rightarrow k&=\frac{e^t-e^{-t}}{2}
\end{aligned}
$$

我們現在再將動點 (h,k) 的符號改寫回 x,y，這便是我們要的參數式

$$
\begin{cases}
x=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\\
y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}
\end{cases}
\tag{1.5}
$$

成功了！我們將參數式這樣設，那麼 t 的幾何意義便是那塊區域面積的兩倍！真的與圓的情況相仿！

於是現在我們就這麼說，$\cos(t)$ 與 $\sin(t)$ 可稱之為圓函數，因為它們可設圓的參數式。當然，我們多數時候還是以三角函數來稱呼它們。而現在呢，有兩個函數，它們可以設雙曲線的參數式，並使 t 的幾何意義會與圓的情況相仿。這兩個函數，便稱之為**雙曲函數**（hyperbolic function）。由於與 $\cos(t)$ 和 $\sin(t)$ 相仿，便分別稱呼為 hyperbolic sine、hyperbolic cosine [2]。簡寫的時候，便簡單地在 $\sin,\cos$ 後面接個 h。所以雙曲函數便是

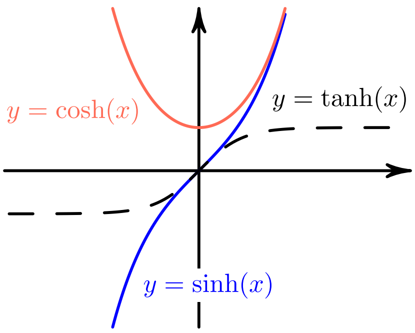
$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad 1\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

[2]sine 是正弦，我們平常簡寫作 sin；cosine 是餘弦，我們平常簡寫作 cos

接著，我們用與三角函數類似的寫法，來寫出

$$\begin{aligned}
\tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \\
\coth(x) &= \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \\
\operatorname{sech}(x) &= \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \\
\operatorname{csch}(x) &= \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}
\end{aligned}$$

這便是六個雙曲函數的定義。由定義明顯可見，$\sinh(x)$ 是奇函數，因為 $\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh(x)$。類似地，由定義可見 $\cosh(x)$ 是偶函數。



1.2 雙曲函數的基本公式

$x = \cos(t), y = \sin(t)$ 能滿足圓方程式 $x^2 + y^2 = 1$。也就是說

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

這便是三角函數的平方恆等式。再將等號兩邊同除以 $\cos^2(t)$，便有

$$1 + \tan^2(t) = \sec^2(t)$$

改同除以 $\sin^2(t)$，便有

$$\cot^2(t) + 1 = \csc^2(t)$$

就這樣，便輕易地把三角函數的三個平方恆等式寫出來。

至於雙曲函數，也有類似的三個平方恆等式。也是類似的做法，由於 $x = \cosh(t), y = \sinh(t)$ 能滿足雙曲線方程式 $x^2 - y^2 = 1$。也就是說

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

這便是雙曲函數的平方恆等式。再將等號兩邊同除以 $\cosh^2(t)$，便有

$$1 - \tanh^2(t) = \operatorname{sech}^2(t)$$

改同除以 $\sinh^2(t)$，便有

$$\coth^2(t) - 1 = \operatorname{csch}^2(t)$$

這樣，三個平方恆等式都寫出來了。跟三角函數的情況頗像，但略有不同。

雙曲函數的很多公式，都是與三角函數的情況非常像，但又偶有不同。例如和角公式

$$\sinh(x+y)=\sinh(x)\cosh(y)+\cosh(x)\sinh(y)$$
$$\cosh(x+y)=\cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y)$$
$$\tanh(x+y)=\frac{\tanh(x)+\tan(y)}{1+\tanh(x)\tanh(y)}$$

以上只要代入定義便可以驗證了，只是寫起來有點麻煩，在此姑且略去。顯見，和三角函數的和角公式幾乎一模一樣，只有兩處的正負號改掉。而這種改正負號的情況，似乎目前還不造成我們的記誦負擔，因為此三式一律都正號，無一負號，反而很好記。

接著將和角公式中的 y 也用 x 代掉，可得倍角公式

$$\sinh(2x)=2\sinh(x)\cosh(x)$$
$$\cosh(2x)=\cosh^2(x)+\sinh^2(x)$$
$$=2\cosh^2(x)-1$$
$$=1+\sinh^2(x)$$
$$\tanh(2x)=\frac{2\tanh(x)}{1+\tanh^2(x)}$$

再將 $\frac{x}{2}$ 代在畫底線的式子裡的 x，代完再移項整理可得半角公式

$$\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\cosh(x)-1}{2}$$
$$\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\cosh(x)+1}{2}$$

於是你可能就有點頭大了，有些地方與三角函數的情況正負號不一樣，也不像和角公式一樣全部都取正號，那到底該怎麼記呢？

以下我便介紹一個方法，用了這個方法，便可直接由三角函數的公式推到雙曲函數的公式。這個方法就是：凡是在三角函數的公式中看到有兩個 sin 的，轉到雙曲函數就差負號！

例如平方恆等式

$$\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$$

看到有 $\sin(x)$ 的二次，轉成雙曲函數時就讓它差負號，變成

$$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$$

至於和角公式

$$\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$$

看到那個 $\sin(x)\sin(y)$，轉成雙曲函數時就讓它差負號，變成

$$\cosh(x+y)=\cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y)$$

而半角公式

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\cos(x)}{2}$$

看到等號左邊有 $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$，就讓它差負號

$$-\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1-\cosh(x)}{2}$$

就這樣！

如果你感到好奇，理由如下。我們知道

$$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$$

如果你不知道，只要將 ix 代入 e^x 的馬克勞林展開當中，便有

$$\begin{aligned}e^{ix}&=1+ix-\frac{x^2}{2}-\frac{ix^3}{3!}+\cdots\\&=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\\&=\cos(x)+i\sin(x)\end{aligned}$$

然後再將 $-x$ 代入上式的 x 中，可得

$$e^{-ix}=\cos(x)-i\sin(x)$$

將兩式寫在一起

$$\begin{aligned}e^{ix}&=\cos(x)+i\sin(x)\\e^{-ix}&=\cos(x)-i\sin(x)\end{aligned}$$

將二式相加除以 2、及相減除以 $2i$，可得

$$\begin{aligned}\cos(x)&=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\\sin(x)&=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\end{aligned}$$

注意到等號右邊，和雙曲函數的定義實在長得很像！這其實就是

$$\begin{aligned}\cos(x)&=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\cosh(ix)\\\sin(x)&=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=-i\sinh(ix)\end{aligned}\tag{1.6}$$

至此，三角函數直接轉換成雙曲函數的方法，已經做出來了！如果想求雙曲函數轉成三角函數，那就將 $-ix$ 代到式子(1.6) 上面的 x，便有

$$\begin{aligned}\cosh(x)&=\cos(-ix)=\cos(ix)\\-i\sinh(x)&=\sin(-ix) && \boxed{\text{接著同乘以 } i}\\\sinh(x)&=i\sin(-ix)=-i\sin(ix)\end{aligned}$$

所以現在便可知道，為什麼有兩個 sin 就差負號，原因就是

$$\begin{aligned}\sin(x)\sin(y) &= (-i\sinh(ix))(-i\sinh(iy)) \\ &= -\sinh(ix)\sinh(iy)\end{aligned}$$

負號來自兩個 i 乘起來得到 -1！以 cos 的和角公式為例：

$$\begin{aligned}\cosh(x+y) &= \cos(ix+iy) \\ &= \cos(ix)\cos(iy)-\sin(ix)\sin(iy) \\ &= \cosh(-x)\cosh(-y)-(-i\sinh(-x))(-i\sinh(-y)) \\ &= \cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y)\end{aligned}$$

果然兩個 sin 就會變號！

三角函數中還有棣美弗（De Moive）公式

$$\big(\cos(x)\pm i\sin(x)\big)^n = \cos(nx)\pm i\sin(nx)$$

現在我們利用三角函數與雙曲函數之間的轉換，可得

$$\big(\cosh(ix)\pm\sinh(ix)\big)^n = \cos(inx)\pm\sin(inx)$$

亦即（再將 $-ix$ 代入上式的 x）

$$\big(\cosh(x)\pm\sinh(x)\big)^n = \cosh(nx)\pm\sinh(nx)$$

1.3 雙曲函數的導函數

接著討論雙曲函數的導函數。這是非常簡單的，只要寫

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

這樣就出來了！同理也有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

至於 $\tanh(x)$ 則這樣寫

$$\begin{aligned}&& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right) \\ &\boxed{\text{商法則}} && = \frac{\cosh(x)\cosh(x)-\sinh(x)\sinh(x)}{\cos^2(x)} \\ &\boxed{\cosh^2(t)-\sinh^2(t)=1} && = \frac{1}{\cos^2(x)} = \operatorname{sech}^2(x)\end{aligned}$$

剩下三個也是類似做法，就留給你當練習了[3]。我列出結果：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\coth(x) &= -\operatorname{csch}^2(x) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sech}(x) &= -\tanh(x)\operatorname{sech}(x) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{csch}(x) &= -\coth(x)\operatorname{csch}(x)\end{aligned}$$

[3]我寫得太少你會看不清楚，但我寫得太多則會剝奪你練習的機會！

寫完以後可以發現，這與三角函數的情況幾乎是一模一樣的！差別只在於，三角函數的導函數，列出來會是正、負、正、負、正、負。雙曲函數的導函數則是正、正、正、負、負、負。

1.4 反雙曲函數

接下來討論反雙曲函數。設

$$y = \sinh^{-1}(x)$$

則

$$\sinh(y) = x$$

也就是說

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

將 2 乘過去，並等號兩邊同乘以 e^y，便可整理出 e^y 的一元二次方程式

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

用公式解可得到

$$\begin{aligned} e^y &= \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} \\ &= x \pm \sqrt{x^2+1} \end{aligned}$$

由於指數函數恆正，等號右邊絕無可能取負號，否則會變小減大是負的。取正號後兩邊取對數，便有

$$y = \sinh^{-1}(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|$$

不過，以上這個方法雖見於各教科書，但這樣寫實在是太麻煩了！有個比較快的方法，直接用

$$e^y = \sinh(y) + \cosh(y) \qquad \left(= \frac{e^y - e^{-y}}{2} + \frac{e^y + e^{-y}}{2} \right)$$

配合

$$\sinh(y) = x,\ \cosh(x) = \sqrt{\sinh^2(y)+1} = \sqrt{x^2+1}$$

便可得到

$$e^y = \sinh(y) + \cosh(y) = x + \sqrt{x^2+1}$$

兩邊取對數

$$y = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|$$

同樣地，如果要求 $y = \cosh^{-1}(x)$，就寫

$$\begin{aligned} e^y &= \sinh(y) + \cosh(y) \\ &= \sqrt{x^2-1} + x \\ \Rightarrow y &= \ln\left|\sqrt{x^2-1} + x\right|,\ x \geq 1 \end{aligned}$$

至於 $\tanh^{-1}(x)$，倒可直接用定義比較快

$$x = \tanh(y) = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$$

分母乘到左邊

$$xe^{2y} + x = e^{2y} - 1$$

於是

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

兩邊取對數

$$2y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

於是

$$y = \tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), |x| < 1$$

另外三個由於倒數關係，只要將 $\frac{1}{x}$ 代入 $\tanh^{-1}(x)$ 即可得 $\coth^{-1}(x)$，以此類推。所以

$$\coth^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right), |x| > 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1}(x) = \ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{1}{x}\right|, 0 < x \le 1$$

$$\operatorname{csch}^{-1}(x) = \ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} + \frac{1}{x}\right|, x \neq 0$$

後面標的範圍只不過是來自雙曲函數的值域。譬如說 $\tanh(x)$ 的值域是 $|y| < 1$，所以 $\tanh^{-1}(x)$ 的定義域就是 $|x| < 1$。

1.5 反雙曲函數的導函數

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh^{-1}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|$$

$$= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

接著分子分母同乘以 $\sqrt{x^2+1} - x$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - x + x - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1-x^2} = \sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

但這樣一路做下來實在很累，不如直接使用反函數求導法

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$$

欲求導 $y=\sinh^{-1}(x)$，先反過來寫 $x=\sinh(y)$，將其對 y 求導後放分母

$$\frac{1}{\cosh(y)}$$

接下來要將 y 換回 x。套平方恆等式，則得到

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(y)}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

這樣快多了！於是我將六個反雙曲函數的導函數列出如下

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh^{-1}(x)&=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sinh(y)}=\frac{1}{\cosh(y)}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh^{-1}(x)&=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\cosh(y)}=\frac{1}{\sinh(y)}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh^{-1}(x)&=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\tanh(y)}=\frac{1}{\operatorname{sech}^2(y)}=\frac{1}{1-x^2}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\coth^{-1}(x)&=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\coth(y)}=\frac{1}{-\operatorname{csch}^2(y)}=\frac{1}{1-x^2}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sech}^{-1}(x)&=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\operatorname{sech}(y)}=\frac{1}{-\operatorname{sech}(y)\tanh(y)}=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{csch}^{-1}(x)&=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\operatorname{csch}(y)}=\frac{1}{-\operatorname{csch}(y)\coth(y)}=-\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

1.6 雙曲函數的泰勒展開

如果要求雙曲函數的馬克勞林展開，也是很簡單，只要這樣寫

$$\begin{aligned}
\sinh(x)&=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)-\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\right]\\
&=\frac{1}{2}\left(2x+2\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\\
&=x+\frac{x^3}{3!}+\cdots
\end{aligned}$$

同樣地

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \frac{e^x+e^{-x}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)+\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(2+2\frac{x^2}{2!}+\cdots\right) \\ &= 1+\frac{x^2}{2!}+\cdots\end{aligned}$$

可以觀察到，$\sinh(x)$ 的展開就是由 e^x 的展開中只取奇次項；$\cosh(x)$ 的展開就是由 e^x 的展開中只取偶次項。既然如此，便有

$$e^x = \sinh(x)+\cosh(x)$$

其它四個雙曲函數的展開，則較困難，故在此不提。其中 $\coth(x)$ 甚至無法用多項式逼近。至於反雙曲函數的展開，只有兩個能做多項式逼近，其它四個則都無法。

先做 $\tanh^{-1}(x)$，由於它的導函數是 $\frac{1}{1-x^2}$，所以我們先展開

$$\frac{1}{1-x^2} = 1+x^2+x^4+x^6+\cdots$$

接著做逐項積分，得到

$$\tanh^{-1}(x) = C+x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots$$

為了解 C，代 $x=0$，得到

$$\tanh^{-1}(0) = 0 = C+0+0+\cdots$$

所以 $C=0$。

接下來再作 $\sinh^{-1}(x)$ 的展開，由於它的導函數是 $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，所以先用二項展開得到

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \left(1+x^2\right)^{\frac{-1}{2}} = C_0^{\frac{-1}{2}}+C_1^{\frac{-1}{2}}x^2+C_2^{\frac{-1}{2}}x^4+C_3^{\frac{-1}{2}}x^6+\cdots$$

接著做逐項積分，得到

$$\sinh^{-1}(x) = C+C_0^{\frac{-1}{2}}x+C_1^{\frac{-1}{2}}\frac{x^3}{3}+C_2^{\frac{-1}{2}}\frac{x^5}{5}+C_3^{\frac{-1}{2}}\frac{x^6}{6}+\cdots$$

為了解 C，代 $x=0$，得到

$$\sinh^{-1}(0) = 0 = C+0+0+\cdots$$

所以 $C=0$。

1.7 雙曲函數在大一微積分中的應用

幾乎沒有用。

雙曲函數事實上是很有用的，反演幾何（inversive geometry）、非歐幾何、懸鍊線問題、廣義相對論等等，都有它的蹤跡。然而在大一微積分課程內，它能派上用場的地方

極其稀有，有些教科書甚至是不介紹雙曲函數的。以下舉出少見的雙曲函數可派上用場的例子。

如果遇到積分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$$

可使用三角代換 $x = \tan(t), \mathrm{d}x = \sec^2(t)\,\mathrm{d}t$，得到

$$\begin{aligned}\int \frac{\sec^2(t)\,\mathrm{d}t}{\sec(t)} &= \int \sec(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \ln\left|\sec(t)+\tan(t)\right| + C \\ &= \ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right| + C\end{aligned}$$

其實可以改用雙曲代換 $x = \sinh(t), \mathrm{d}x = \cosh(t)\,\mathrm{d}t$，得到

$$\begin{gathered}\int \frac{\cosh(t)\,\mathrm{d}t}{\cosh(t)} = \int \mathrm{d}t \\ = t + C = \sinh^{-1}(x) + C\end{gathered}$$

更簡潔了些。還有像是

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

使用三角代換也是頗麻煩。若改用雙曲代換，則

$$\begin{aligned}&\int \cosh(t)\cosh(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int 1+\cosh(2t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sinh(2t)}{2}\right] + C \\ &= \frac{1}{2}\left[t + \sinh(t)\cosh(t)\right] + C \\ &= \frac{1}{2}\left[\sinh^{-1}(x) + x\sqrt{1+x^2}\right] + C \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + x\sqrt{1+x^2}\right] + C\end{aligned}$$

由上可見，用雙曲代換可能會讓積分比較好做。但是你不會雙曲函數，也不會因此就不會做，只是較麻煩而已。